Brevet 2019 - France
Correction

Exercice 1

1. $\boxed{69 = 3 \times 23}$: 3 et 23 sont des nombres premiers !

$1\,150 = 2 \times 575$, $575 = 5 \times 115$, $115 = 5 \times 23$ et donc $\boxed{1\,150 = 2 \times 5 \times 5 \times 23 = 2 \times 5^2 \times 23}$

$4\,140 = 2 \times 2070$, $2070 = 2 \times 1\,035$, $1\,035 = 3 \times 345$, $345 = 3 \times 115$,

$115 = 5 \times 23$ donc $\boxed{4\,140 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 23 = 2^2 \times 3^2 \times 5}$

2. Il faut chercher les diviseurs communs de ces trois nombres.
1, 3, 23 et 69 sont les diviseurs de 69.

3 n'est pas un diviseur de 1 150, 69 non plus puisque $69 = 3 \times 23$.
Il ne reste plus que 1 et 23 comme diviseurs comuns.

1 et 23 sont des diviseurs de 4 140.

Il peut y avoir un seul marin... mais c'est un peu ridicule !

$\boxed{\text{Il y a 23 marins.}}$

Exercice 2

1. *C'est une situation d'usage de la trigonométrie !*

Dans le triangle PAD rectangle en A (puisque $ABCD$ est un rectangle), on connaît le côté adjacent à l'angle $\widehat{ADM}$ et le côté opposé de cet angle.

$\tan\widehat{ADM} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AM}{2\ m}$ d'où $AM = 2\ m \times \tan 60° \approx 3,46\ m$.

$\boxed{AM \approx 3,46\ m}$

2. La partie de plaque non utilisée est un rectangle de longueur $BC = 2\ m$ et de largeur $MB = AB - AM = 4\ m - 3,46\ m \approx 0,54\ m$.
L'aire de cette partie non utilisée est donc $A_1 = 2\ m \times 0,54\ m = 1,08\ m^2$
Or le rectangle $ABCD$ a une aire qui mesure $A = 4\ m \times 2\ m = 8\ m^2$

La proportion de la plaque non utilisée est donnée par le quotient : $\dfrac{1,08\ m^2}{8\ m^2} = 0,135$

$\boxed{\text{La proportion de la plaque non utilisée est d'environ 14 \% soit } 0,14.}$

3. Le triangle AMD et le triangle DMN sont rectangles. Comme $ABCD$ est un rectangle, les droites (AM) et (DN) sont parallèles. Ainsi les angles **alterne-interne** $\widehat{DMN}$ et $\widehat{ADM}$ sont égaux à 60°. Pour être complet on en déduit que le troisième angle de ces triangles mesure 30° puisque $90° + 60° + 30° = 180°$

On en déduit que les triangles AMD et MDN sont semblables

Le triangle DPM est rectangle en P. De plus comme $ABCD$ est un rectangle, $\widehat{PDN} = 90° - \widehat{ADM} = 90° - 60° = 30°$
Finalement les angles du triangle DPM mesurent aussi 90°, 30° et 60°.
DPM est semblable avec AMD et MDN.

Enfin le triangle PMN est encore rectangle. L'angle $\widehat{PMN} = 60°$.

$\boxed{\text{Les triangles } AMD, MDN, PMN \text{ et } DPM \text{ sont semblables.}}$

4. *C'est une question assez difficile. Il faut observer les deux triangles et déterminer les côtés deux à deux homothétiques.*

PDN et AMD sont rectangles. Les hypoténuses des deux triangles sont donc homothétiques. Plus clairement $[MD]$ est un agrandissement de $[DN]$.
On connaît la mesure de $[DN]$ en effet $DN \approx 3,46\ m$.
Reste à calculer la mesure de $[MD]$.
Dans le triangle AMD rectangle en A, d'après le **théorème de Pythagore** on a :
$AM^2 + AD^2 = DM^2$
$3,46^2 + 2^2 = DM^2$
$DM^2 = 11,9716 + 4$
$DM^2 = 15,9716$
$DM = \sqrt{15,9716} \approx 4$

Cette proximité avec 4 peut paraître étonnante ! Il suffit d'utiliser un peu de trigonométrie au lieu du théorème de Pythagore pour le comprendre.

Dans le triangle AMD rectangle en A on connaît le côté adjacent à l'angle à $60°$ et on cherche la mesure de l'hypoténuse.

$\cos 60° = \dfrac{2\ m}{DM}$ donc $DM = \dfrac{2\ m}{\cos 60°} = 4$ cela vient du fait que $\cos 60° = 0,5$.

Finalement $DM = 4\ m$ et $DN \approx 3,46\ m$.
On cherche le coefficient d'agrandissement k tel que $3,46\ m \times k = 4\ m$ d'où $k = \dfrac{4\ m}{3,46\ m} \approx 1,16$.

On pouvait aussi adopter un raisonnement trigonométrique.
Il faut évaluer le quotient $\dfrac{DM}{DN}$ ou son inverse $\dfrac{DN}{DM}$

Dans le triangle rectangle DMN rectangle en A, le quotient $\dfrac{DN}{DM} = \cos 30°$
Donc $\dfrac{DM}{DN} = \dfrac{1}{\cos 30°} \approx 1,16$

$\boxed{\text{Le coefficient d'agrandissement est bien inférieur à } 1,5.}$

Exercice 3

1.a Le cylindre C_2 a un diamètre $1,5\ cm$ donc un rayon de $0,75\ cm$ et une hauteur de $4,2\ cm$.
La base d'un cylindre est un disque. L'aire d'un disque se calcule par l'expression $\pi \times r^2$ où r est le rayon.

$V_{C_2} = \pi \times (0,75\ cm)^2 \times 4,2\ cm = 2,3625\pi\ cm^3 \approx 7,42\ cm^3$

Ce cylindre est rempli au deux-tiers de sable : $\dfrac{2}{3} \times 7,42\ cm^3 \approx 4,95\ cm^3$

$\boxed{\text{Le volume de sable est d'environ } 4,95\ cm^3}$

1.b Le débit d'écoulement est égal à $1,98\ cm^3/min$ ce qui signifie qu'en $1\ min$ s'écoule exactement $1,98\ cm^3$ de sable.

$4,95\ cm^3 \div 1,98\ cm^3 = 2,5$

Or $2,5\ min = 2\ min\ 30\ s$ car $2,5 \times 60\ s = 150\ s$ et que $150\ s = 2 \times 60\ s + 30\ s$

$\boxed{\text{Le sable va mettre } 2\ min\ 30\ s \text{ à s'écouler.}}$

2.a Il faut faire la somme suivante : $1+1+2+6+3+7+6+3+1+2+3+2+3 = 40$ $\boxed{\text{40 tests ont été effectués.}}$

2.b Le temps minimale de cette série est $2\ min\ 22\ s$. Le temps maximal est $2\ min\ 38\ s$.
L'étendue de cette série pour ce sablier est donc $2\ min\ 38\ s - 2\ min\ 22\ s = 16\ s$

$\boxed{\text{L'étendue est bien inférieure à } 20\ s.}$

C'est une série à 40 valeurs mesurées. La médiane est donc, par exemple, la moyenne de la vingtième et vingt-et-unième valeurs.
La vingtième valeurs est 2 min 29 s et la vingt-et-unième est 2 min 30 s.

La médiane est donc bien comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s.

Pour calculer la moyenne des temps il y a plusieurs méthodes :

Méthode 1 : On fait la moyenne avec les temps complets mais il faut convertir chaque mesure en secondes.
La moyenne pondérée des temps est :

$$m = \frac{1\times 142\,s + 1\times 144\,s + 2\times 146\,s + 6\times 147\,s + 3\times 148\,s + 7\times 149\,s + 6\times 150\,s + 3\times 151\,s + 1\times 152\,s + 2\times 153\,s + 2\times 154\,s + 2\times 155\,s + 3\times 158\,s}{40}$$

$$m = \frac{6\,004\,s}{40} \approx 150,1\,s \text{ soit } 2\,min\,30,5\,s.$$

Méthode 2 : On ne tient pas compte des 2 min et on ne fait que la moyenne des secondes restantes :

$$m = \frac{1\times 22\,s + 1\times 24\,s + 2\times 26\,s + 6\times 27\,s + 3\times 28\,s + 7\times 29\,s + 6\times 30\,s + 3\times 31\,s + 1\times 32\,s + 2\times 33\,s + 2\times 34\,s + 2\times 35\,s + 3\times 38\,s}{40}$$

$$m = \frac{1\,204\,s}{40} = 30,1$$

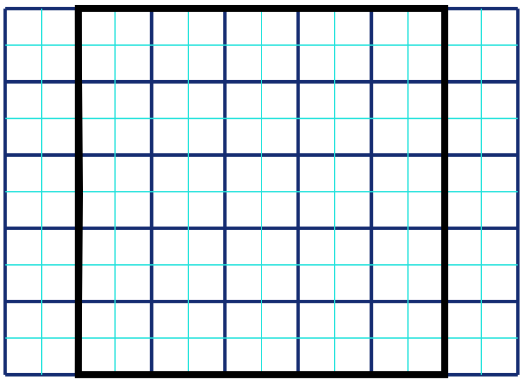
La moyenne des temps est bien comprise entre 2 min 28 s et 2 min 32 s.

Le sablier testé peut donc être mis en vente !

Exercice 4

Encore un exercice difficile ! La fonction carré trace un carré par demi-segment de 5 unités... dur dur ! !

1. Il faut tracer un carré de 5 cm de côté !



2. Le dessin B est régulier : un carré, un tiret, un carré, un tiret...
Le dessin A est aléatoire : des carrés consécutifs, des tirets consécutifs !

Le script 1 correspond au dessin B, les script 2 au dessin A.

3.a Nous sommes dans une expérience aléatoire à deux issues équiprobables.

La probabilité d'obtenir un carré est $\frac{1}{2} = 0,5$ soit 50 %.

3.b L'expérience aléatoire consiste maintenant à reproduire deux fois de suite l'expérience précédente.
On peut présenter les issues équiprobables possibles dans un tableau en notant C pour un carré et T pour un tiret.

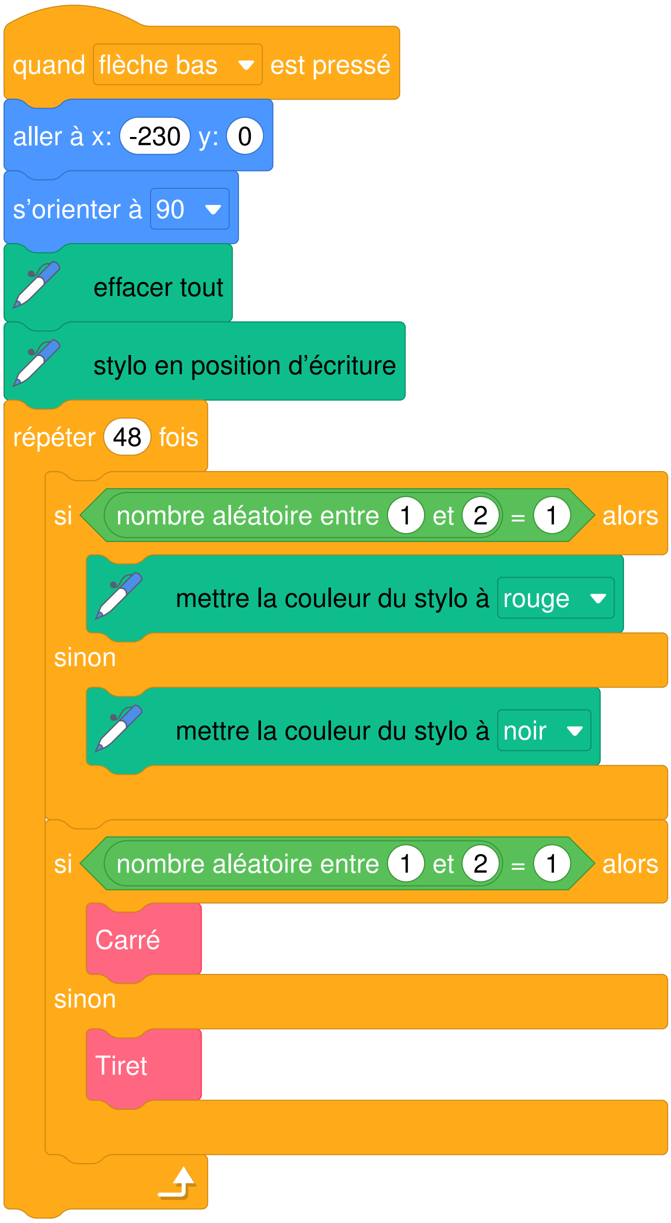
	C	T
C	CC	CT
T	TC	TT

Il y a 4 issues équiprobables dont une CC correspond à la demande.

$$\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \frac{1}{4} = 0,25 \text{ soit } 25\ \%.}$$

4. *Encore une question très difficile ! On ne souhaite pas que les tirets soient rouge et les carrés noirs, on souhaite un tirage aléatoire de la couleur, il faut donc deux conditions ! !*

Voici une proposition de script 2 :



Exercice 5

1.a Le rectangle $\boxed{3}$ est l'image du rectangle $\boxed{4}$ par la translation qui transforme C en E

1.b Le rectangle $\boxed{3}$ est l'image du rectangle $\boxed{1}$ par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

1.c Le rectangle $ABCD$ est l'image du rectangle $\boxed{2}$ par l'homothétie de centre D et de rapport 3.

Le rectangle $ABCD$ est l'image du rectangle $\boxed{3}$ par l'homothétie de centre B et de rapport 3.

Le rectangle $ABCD$ est l'image du rectangle $\boxed{4}$ par l'homothétie de centre C et de rapport 3.

2. Les petits rectangles ont des mesures 3 fois plus petites que celles du grand rectangle.

Or on sait que si les mesures d'un objet géométrique sont multipliées par k alors les aires sont multipliées par k^2.

Ainsi les petits rectangles ont des aires $3^3 = 9$ fois plus petites que celle du grand rectangle.

Or $1,215\ m^2 \div 9 = 0,135\ m^2$. $\boxed{\text{Les petits rectangles ont une aire de } 0,135\ m^2}$

On peut observer assez facilement qu'il y a exactement 9 petits rectangles dans le grand !

3. *Cette question est extrêmement difficile... au point que je me demande quels élèves de troisième est capable de produire un de ces raisonnements... et sans erreur... (je me suis moi-même trompé avant de trouver une réponse convenable !)*
On sait que la longueur et la largeur du grand rectangle sont dans un ratio 3 : 2.

Cela signifie que $\dfrac{L}{3} = \dfrac{l}{2}$ ou encore que $\dfrac{L}{l} = \dfrac{3}{2}$ et surtout que L et l sont proportionnels aux nombres 3 et 2.

Méthode 1 : passage à l'unité

On peut poser $u = \dfrac{L}{3} = \dfrac{l}{2}$ on a ainsi $L = 3u$ et $l = 2u$

Cherchons u tel que $L \times l = 1,215$ c'est à dire $3u \times 2u = 6u^2 = 1,215$. Il faut résoudre l'équation :

$$6u^2 = 1,215$$
$$u^2 = 1,215 \div 6$$
$$u^2 = 0,2025$$
$$u = \sqrt{0,2025}$$
$$u = 0,45$$

Ainsi $L = 3 \times 0,45\ m = 1,35\ m$ et $l = 2 \times 0,45\ m = 0,90\ m$... on a bien $1,35\ m \times 0,90\ m = 1,215\ m^2$.

Méthode 2 : équation en L ou l

On a $\dfrac{L}{3} = \dfrac{l}{2}$ donc $2L = 3l$.
$2L \times 3l = 6L \times l = 6 \times 1,215\ cm^2 = 7,29\ cm^2$

De plus comme $2L = 3l$ on arrive à $2L \times 3l = 2L \times 2L = 4L^2$ ou $2L \times 3l = 3l \times 3l = 9l^2$

Reste à résoudre l'une des deux équations :

$$4L^2 = 7,29$$
$$L^2 = 7,29 \div 4$$
$$L^2 = 1,8225$$
$$L = \sqrt{1,8225}$$
$$L = 1,35$$

$$9l^2 = 7,29$$
$$l^2 = 7,29 \div 9$$
$$l^2 = 0,81$$
$$l = \sqrt{0,81}$$
$$l = 0,90$$

Ouf ! !

Exercice 6

1. Avec le programme 1 en choisissant 5 comme nombre de départ on obtient successivement :
5 puis $5 \times 3 = 15$ et enfin $15 + 1 = 16$.

Avec le programme 2 en choisissant 5 comme nombre de départ on obtient successivement :
5 puis d'une part $5 - 1 = 4$ et d'autre part $5 + 2 = 7$ pour finalement obtenir $4 \times 7 = 28$

$\boxed{\text{On obtient bien 16 et 28 en prenant 5 au départ dans les programmes 1 et 2.}}$

2.a $\boxed{A(x) = 3x+1}$

2.b Il faut résoudre l'équation :

$$A(x) = 0$$
$$3x+1 = 0$$
$$3x = 0-1$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Vérifions en prenant $-\frac{1}{3}$ dans le programme 1 on obtient successivement :

$-\frac{1}{3}$ puis $-\frac{1}{3} \times 3 = -1$ et enfin $-1+1 = 0$.

$\boxed{\text{En prenant } -\frac{1}{3} \text{ au départ on obtient 0 dans le programme 1.}}$

3. $B(x) = (x-1)(x+2)$
$B(x) = x^2+2x-x-2$
$B(x) = x^2+x-2$

$\boxed{\text{La forme développée de } B(x) \text{ est } x^2+x-2.}$

4.a On développe chaque membre de l'égalité pour comparer.

$B(x)-A(x) = (x-1)(x+2)-(3x+1)$
$B(x)-A(x) = x^2+x-2-3x-1$
$B(x)-A(x) = x^2-2x-3$

Développons $(x+1)(x-3) = x^2+x-3x-3 = x^2-2x-3$

$\boxed{\text{On arrive ainsi à } B(x)-A(x) = (x+1)(x-3).}$

4.b Méthode experte :
x un nombre de départ tel que $A(x) = B(x)$ cela signifie que $B(x)-A(x) = 0$ puisque les deux résultats finaux sont égaux.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$B(x)-A(x) = 0$$
$$(x+1)(x-3) = 0$$

On sait que **un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$x+1 = 0 \qquad\qquad x-3 = 0$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = 3$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux nombres de départ qui donnent le même résultat pour les deux programmes : } -1 \text{ et } 3.}$

Vérifions :
Pour -1 le premier programme donne $3\times(-1)+1 = -3+1 = -2$
Le second donne $(-1-1)(-1+2) = (-2)\times 1 = -2$

Pour 3 le premier programme donne $3\times 3+1 = 9+1 = 10$
Le second donne $(3-1)(3+2) = 2\times 5 = 10$

Méthode empirique :
On pouvait tabuler à la calculatrice les deux fonctions $A(x)$ et $B(x)$ et déterminer des images communes.
On pouvait aussi faire des tests et espérer trouver une des deux solutions... ou les deux... -1 et 3 étaient accessibles !