Math93.com

# Baccalauréat 2019 - S
# Correction Métropole

### Série S Obligatoire et spécialité

### 21 Juin 2019

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

**Remarque**

*Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

## Exercice 1. 6 points

**Commun à tous/toutes les candidat/e/s**

### Partie A

On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

**1.**

**1. a. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.**

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0\end{array}\right. \implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

**1. b. Montrer que la fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.**

Pour $x$ réel on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)}$$

On a alors :

$$f'(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{2x}}{2\,\mathrm{e}^{x}}$$

et donc $f'$ est du signe de $1 - \mathrm{e}^{2x}$ puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l}1 - \mathrm{e}^{2x} = 0 \iff x = 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{2x} > 0 \iff x < 0\end{array}\right. \implies 1 - e^{2x} < 0 \iff x > 0$$

Donc $f'$ est négative sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et $f$ décroissante sur cet intervalle.

**1. c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, une unique solution, qu'on note $\alpha$.**

**Théorème 1** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si $f$ est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

***Remarque*** *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- Application du corollaire sur $[0\ ;\ +\infty[$ :
  - La fonction $f$ est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ ;
  - Le réel $k=0$ est compris entre $f(0)=\dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

**2. Montrer que $f(x)=0$ admet deux solutions opposées sur $\mathbb{R}$.**

- Pour $x$ réel on a $f(-x)=f(x)$ or on a montré qu'il existait $\alpha\in[0\ ;\ +\infty[$ telle que $f(\alpha)=0$ et donc : $f(-\alpha)=f(\alpha)=0$.
- Unicité : si il existait une autre solution $\beta\neq-\alpha$ sur $\mathbb{R}_-$ alors nécessairement on aurait $f(-\beta)=f(\beta)=0$ et donc on aurait une 2[e] solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ ce qui est impossible d'après ce qui précède.
- Conclusion : $f(x)=0$ admet deux solutions opposées sur $\mathbb{R}$.

## Partie B

**1. Calculer la hauteur d'un arceau.**

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On sait que pour tout réel $x$ positif on a $f(-x)=f(x)$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$. Par conséquent la fonction f atteint son maximum en 0.

La hauteur est : $\boxed{f(0)=\dfrac{5}{2}\text{ m}}$.

**2.**

**2. a. Montrer que : $1+(f'(x))^2=\dfrac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2$.**

Pour $x$ de $[-\alpha\ ;\ \alpha]$ on a :

$$\begin{aligned}
1+(f'(x))^2 &= 1+\left(\frac{1}{2}\left(-e^{x}+e^{-x}\right)\right)^2\\
&= 1+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}\right)\\
&= \frac{4}{4}+\frac{1}{4}\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\left(e^{x}\right)^2+2\underbrace{e^{-x}e^{x}}_{1}+\left(e^{x}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{1+(f'(x))^2=\frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}$$

**2. b. En déduire la valeur de l'intégrale et justifier que la longueur d'un arceau est $e^{\alpha}-e^{-\alpha}$.**

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\alpha}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\\
I &= \int_0^{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}\,dx\\
I &= \int_0^{\alpha}\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)dx \quad\text{car } \left(e^{x}+e^{-x}\right)>0\\
I &= \left[\ \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\ \right]_0^{\alpha}\\
I &= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{-0}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)}$$

Et par raison de symétrie, la longueur d'un arceau est

$$\boxed{2I=e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$$

## Partie C

1. **Montrer que la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m$^2$, par : $A = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x - 2$.**

2. **On prend 1,92 pour valeur approchée de $\alpha$. Déterminer, au m$^2$ près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.**

**La suite de la correction est en cours de réalisation**

## Exercice 2. 5 points

**Commun à tous/toutes les candidat/e/s**

## Exercice 3. 4 points

**Commun à tous/toutes les candidat/e/s**

## Exercice 4. Obligatoire — 5 points

**Candidats n'ayant pas choisi la spécialité**

## Exercice 4. Spécialité 5 points

**Candidats ayant choisi la spécialité**