Baccalauréat 2017 - S
Centres Étrangers

Math93.com

Série S Obli. et Spé.
13 Juin 2017
Correction

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM : Probabilités — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

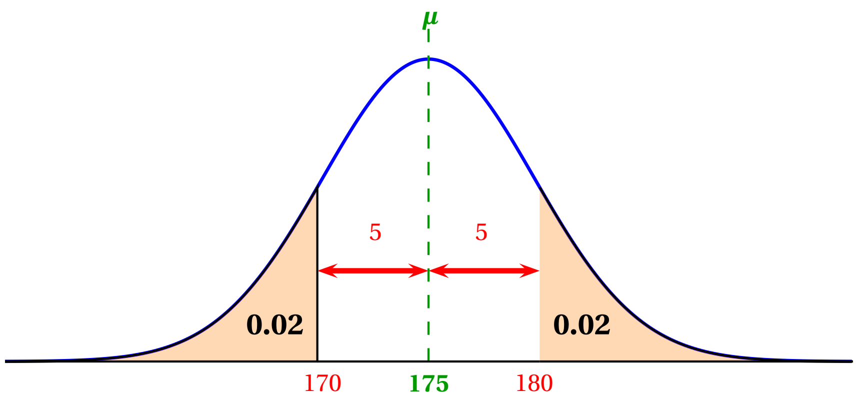
On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance , $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leq 170) = 0,02$.

Question 1 (Réponse b)

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la masse du sachet soit entre 170 et 180 grammes ?

a. 0,04 — $\boxed{\textbf{b.}\ 0{,}96}$ — **c.** 0,98 — **d.** On ne peut répondre

Preuve.



$P(X \leq 170) = 0.02 = P(X \geq 180)$

On sait que $P(X \leq 170) = 0,02$ donc par raison de symétrie on a :

$$P(170 \leq X \leq 180) = 1 - 2 \times 0,02 = \underline{0,96}$$

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B. Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2 (Réponse a)

Sur un échantillon de 50 bonbons issues de la machine A, quelle est la probabilités, arrondie au centième, qu'au moins 2 soient déformés.

a. 0,72   **b.** 0,28   **c.** 0,54   **d.** On ne peut répondre

Preuve.
Notons N la variable aléatoire qui compte le nombre de bonbons déformés lors de ce tirage.

- **Modélisation**
  Il y a répétition de $n = 50$ événements indépendants et identiques (on tire un bonbon).
  Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :
  - succès de probabilité $p = 0,05$ quand un bonbon est déformé ;
  - et échec de probabilité $1 - p = 0,95$ sinon.

  Donc la variable aléatoire N qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 50$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,05$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 50$ et $p = 0,05$.
  On peut écrire :

$$N \text{ suit } \mathscr{B}\left(50\ ;\ 0,05\right) \text{ ou } N \sim \mathscr{B}\left(50\ ;\ 0,05\right).$$

- **Calcul**.
  Puisque N suit une loi Binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,05$ on a :

$$P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{50}{k} \times 0,05^k \times (0,95)^{50-k}$$

  La probabilité qu'au moins 2 bonbons soient déformés se traduit par $p(N \geq 2)$ or en passant à l'évènement contraire :

$$p(N \geq 2) = 1 - p(N = 0) - p(N = 1)$$
$$p(N \geq 2) = 1 - \binom{50}{0} \times 0,05^0 \times (0,95)^{50-0} - \binom{50}{1} \times 0,05^1 \times (0,95)^{50-1}$$
$$p(N \geq 2) = 1 - 1 \times 1 \times (0,95)^{50} - 50 \times 0,05^1 \times (0,95)^{49}$$

  Donc :

$$\boxed{p(N \geq 2) \approx 0.72}$$

- **Autre méthode**.
  On pouvait aussi directement utiliser la calculatrice, dans ce cas on écrit :

$$p(N \geq 2) = 1 - p(N \leq 1) \approx 0,72$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $1 -$ *TIStat.binomFdR* (50 , 0,05 , 1) $\approx 0,72057$
> - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib* $\Rightarrow 1 -$ *binomFrép* (50 , 0,05 , 1) $\approx 0,72057$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM* $\Rightarrow 1 -$ *binomialCD* (1 , 50 , 0,05) $\approx 0,72057$

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02. Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

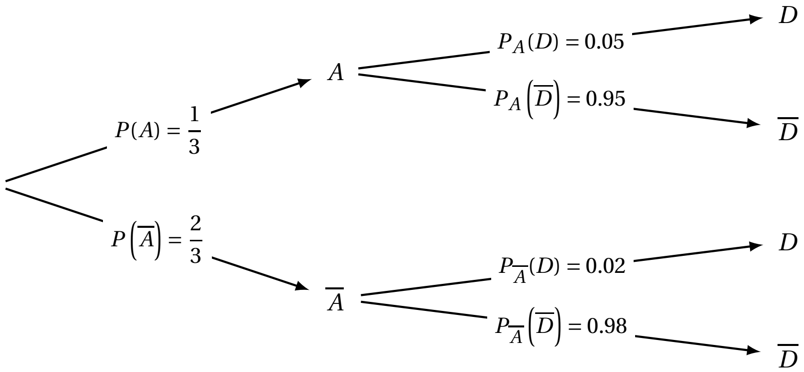
Question 3 (Réponse c)

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

a. 0,02 **b.** 0,67 $\boxed{\textbf{c. } 0{,}44}$ **d.** 0,01

Preuve.

Notons D l'évènement, « le bonbon est déformé » , A l'évènement, « le bonbon vient de l'usine A » et le complémentaire $\overline{A}$ (pour l'usine B) . On peut résumer l'étude à l'aide d'un arbre en utilisant les données de la question précédente.



La probabilité cherchée est $p_D\left(\overline{A}\right)$ et l'on a :

$$p_D\left(\overline{A}\right) = \frac{p\left(D \cap \overline{A}\right)}{p(D)}$$

- Calculons $p(D)$.
  Les évènement A et $\overline{A}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(D \cap A) + p\left(D \cap \overline{A}\right) \\ &= p(A) \times p_A(D) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(D) \\ &= \frac{1}{3} \times 0{,}05 + \frac{2}{3} \times 0{,}02 \end{aligned}$$

$$p(D) = \frac{0{,}09}{3} = \underline{0{,}03}$$

- Calculons $p_D\left(\overline{A}\right)$.

$$p_D(B) = \frac{p\left(D \cap \overline{A}\right)}{p(D)} = \frac{0{,}02 \times \frac{2}{3}}{0{,}03} \approx \underline{0{,}44}$$

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 (Réponse a)

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

a. 0,45	**b.** 1	**c.** 55	**d.** On ne peut pas savoir

Preuve.

Propriété 1

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Puisque la variable aléatoire Y suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours on a :

$$E(Y) = 500 = \frac{1}{\lambda} \iff \lambda = \frac{1}{500}$$

De ce fait on peut calculer la probabilité cherchée :

$$p(Y \leq 300) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{500}\times 300} \approx \underline{0,45}$$

Remarque : les réponses proposées imposaient la première solution sans hésitation.

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 (Réponse c)

Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

a. 40	**b.** 400	**c.** 1 600	**d.** 20

Preuve.
Si f représente la fréquence du caractère étudié dans un échantillon de taille n, alors si les condition sont vérifiées , l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, est donné par :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc son amplitude est : $A = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche donc un entier n strictement positif tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,05$. En composant par la fonction inverse strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,05 \iff \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{0,05} \iff \sqrt{n} \geq \frac{2}{0,05} = 40$$

Et puisque n est positif, on obtient en composant par la fonction carrée strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\underline{n \geq 1\,600}$.

Exercice 2. Espace 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

L' espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère deux droites d_l et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1\ ;\ \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2\ ;\ \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases},\ t' \in \mathbb{R}$$

On admet que les droites d_l et d_2 sont non coplanaires. Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_l et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point $A(2;3;0)$ appartient à la droite d_l.

Pour $t = 0$ dans l'équation de d_1 on obtient $\begin{cases} x = 2+0 = 2 \\ y = 3-0 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$. Donc le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite d_l.

2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_l et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2. Les droites d_l et d_2 sont-elles parallèles ?

Les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite dont on a une représentation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ sont $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ donc :

$$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites d_l et d_2 ne sont pas parallèles.

Remarque : dans l'énoncé, on admet que les droites d_l et d_2 sont non coplanaires, donc nécessairement elles ne sont pas parallèles.

3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}\,(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

On a les produits scalaires :

$$\begin{cases} \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} . \overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+2-3 = 0 \\ \\ \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} . \overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2-2+0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{v} \perp \overrightarrow{u_1} = 0 \\ \vec{v} \perp \overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{v}\,(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est bien orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4. *Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$. On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.*

4. a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x+4y-z-22=0$.

- La vecteur $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,4\,;\,-1)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ en effet on a les produits scalaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=5-4-1=0 \\ \\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}=5-8+3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}=0 \end{cases}$$

- Or par théorème :

Théorème 1

$\overrightarrow{n}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P puisqu'il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$.

- Par ailleurs

Propriété 2

Soit vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{n}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \iff a\,(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 2 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in P \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z-0\end{pmatrix}.\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in P \iff 5(x-2)+4(y-3)-(z-0)=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in P \iff 5x-10+4y-12-z=0$$

$$\boxed{P\ :\ 5x+4y-z-22=0}$$

4. b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\,;\,3\,;\,5)$.

Pour cette question on peut vérifier que le point B appartient bien à la droite, au plan et que le plan ne contient pas la droite ou chercher directement les coordonnées de l'éventuel point d'intersection.

- La droite d_2 n'est pas parallèle au plan P car le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan n'est pas orthogonal au vecteur directeur de la droite $\overrightarrow{u_2}$.

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=10+4+0=14\neq 0$$

©ISSN 2272-5318

- La droite et le plan sont donc sécants en un point dont les coordonnées vérifient le systèmes :

$$d_2 \cap P \iff \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \\ 5x+4y-z-22=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \\ 5(-5+2t')+4(-1+t')-5-22=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \\ -25+10t'-4+4t'-5-22=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \\ 14t' = 56 \iff t = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5+2\times 4 = 3 \\ y = -1+4 = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

- Conclusion : la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\,;\,3\,;\,5)$

5. *On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\,(1\,;\,-2\,;\,-3)$, et passant par le point $B(3;3;5)$.*

5. a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

La droite Δ passant par le point $B\,(3;3;5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(1;-2;-3)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{BM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{v}$. On a alors :

$$\Delta = \left\{ M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\,\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-5 \end{pmatrix} = k\,\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 1k+3 \\ y = -2k+3 \\ z = -3k+5 \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{R}}$$

5. b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

On va chercher à résoudre le système lié aux équations des deux droites.

$$\begin{cases} 2+t = 3+k \\ 3-t = 3-2k \\ t = 5-3k \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5-3k \\ 2+5-3k = 3+k \\ 3-5+3k = 3-2k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 5-3k \\ 7 = 3+4k \\ -2+5k = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 5-3k \\ k = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Or pour $t = 2$ on a $\begin{cases} x = 2+t = 4 \\ y = 3-t = 1 \\ z = t = 2 \end{cases}$ donc les droites d_1 et Δ sont donc sécantes au point $C(4\,;\,1\,;\,2)$.

5. c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

- D'après la question (3.) la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonale au droites d_1 et d_2.
- D'après la question (5b.) les droites d_1 et Δ sont sécantes en un point $C(4\,;\,1\,;\,2)$.
- Par ailleurs , le point $B(3\,;\,3\,;\,3)$ appartient à la droite Δ par définition (5.) et à la droite d_2 d'après la question (4b.)
- Donc la droite Δ est sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites ce qui répond au problème posé.

Exercice 3. Fonctions — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre $\left(\mu g.L^{-1}\right)$, du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse. Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0\,;+\infty[$. La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 1$.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale. Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

La demi-vie, notée $t_{0,5}$ est la solution (éventuelle) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation $f(t) = \dfrac{f(0)}{2}$. Puisque $f(0) = 20$ on a :

$$\begin{aligned} f(t) = 10 &\iff 20\,\mathrm{e}^{-0,1t} = 10 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0,1t} = 0,5 \end{aligned}$$

On compose alors par la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(t) = 10 &\iff \ln \mathrm{e}^{-0,1t} = \ln 0,5 \\ &\iff -0,1t = \ln 0,5 = -\ln 2 \\ &\iff t = \frac{-\ln 2}{-0,1} = \underline{10\ln 2} \end{aligned}$$

Cette demi-vie est donc $\underline{t_{0,5} = 10\ln 2 \approx 6,9 \text{ h}}$

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}. Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

La question revient à résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation :

$$\begin{aligned} f(t) \le 0,2 &\iff 20\,\mathrm{e}^{-0,1t} \le 0,2 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0,1t} \le 0,01 \end{aligned}$$

On compose alors par la fonction ln définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(t) \le 0,2 &\iff -0,1t \le \ln(0,01) \\ &\iff t \ge -10\ln(0,01) = 10\ln(100) \approx 46,05170 \end{aligned}$$

Le temps à partir duquel le médicament est éliminé, arrondi au dixième est donc de 46,1 heures.

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}.h , le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à μg.L^{-1}.h .

Sur $[0\,;+\infty[$, une primitive de la fonction f est :

$$F \ : \ x \to 20 \times \frac{1}{-0,1} \times \mathrm{e}^{-0,1t} = -200\ \mathrm{e}^{-0,1t}$$

On a donc pour tout réel x positif strictement :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(0) = \underline{-200\ \mathrm{e}^{-0,1x} + 200}$$

Or on a par composition des limites :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0,1x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{array}\right. \quad \Bigg| \implies \lim_{x\to+\infty} \left(-200\ \mathrm{e}^{-0,1x}\right) = 0$$

Et donc par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-200\ \mathrm{e}^{-0,1x} + 200\right) = 200 \implies \boxed{ASC = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 200\mu\text{g.L}^{-1}.h}$$

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre $\left(\mu g.L^{-1}\right)$, au bout de t heures après ingestion par voie orale. Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(e^{-0,1t} - e^{-t}\right)$, avec $t \in [0\,;+\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\mu g.L^{-1}$.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a : $g'(t) = 20\ \mathrm{e}^{-t}\ \left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right)$.

La fonction g est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel t de cet intervalle on a (en appliquant la dérivée de $k\mathrm{e}^{u}$ soit $ku'\mathrm{e}^{u}$) :

$$g'(t) = 20\left(-0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t} + \mathrm{e}^{-t}\right)$$

On factorise alors par e^{-t} ce qui nous donne :

$$g'(t) = 20 \times \mathrm{e}^{-t} \times \left(-0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t+t}+1\right) = \underline{20\ \mathrm{e}^{-t}\ \left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right)}$$

2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$).
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

La fonction dérivée g' s'exprime sous la forme d'un produit de deux facteurs. Le facteur $20\ \mathrm{e}^{-t}$ est strictement positif sur $[0\,;+\infty[$ puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. la fonction dérivée g' est donc du signe du facteur $\left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right) \geq 0 &\iff -0,1\,\mathrm{e}^{0,9t} \geq -1\\ &\iff \mathrm{e}^{0,9t} \leq 10\end{aligned}$$

On compose alors par la fonction ln définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right) \geq 0 &\iff 0,9t \leq \ln 10\\ &\iff t \leq \frac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56\end{aligned}$$

Donc on obtient de la même façon :

$$\left\{\begin{array}{l}\left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right) \geq 0 \iff t \leq \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56\\ \left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right) = 0 \iff t = \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56\end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \Longrightarrow \left(1-0,1\ \mathrm{e}^{0,9t}\right) \leq 0 \iff t \geq \frac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$$

Ce qui nous donne les variations de la fonction g avec $g\left(\dfrac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$:

x	0		$\dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2.56$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	↗	$g\left(\dfrac{\ln 10}{0.9}\right) \approx 13.94$	↘	

La durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale est donc $t = \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$ h, soit environ $\underline{\text{2 heures et 34 minutes}}$.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

*On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en **A-1**. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de $20\mu g.L^{-1}$. On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection. Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$. On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit $20\mu g.L^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.*

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ le postulat

$$(P_n)\ :\ u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, le postulat (P_1) est vrai puisque :
  $$\begin{cases} u_1 = 20 \\ \text{ et pour } n = 1 \text{ on a} \\ 40 - 40 \times 0,5^n = 40 - 40 \times 0,5^1 = 20 \end{cases}$$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  Soit
  $$u_{n+1} = 0,5u_n + 20$$
  On applique alors l'hypothèse de récurrence
  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,5 \times \left(\underbrace{40 - 40 \times 0,5^n}_{u_n}\right) + 20 \\ &= 20 - 40 \times 0,5 \times 0,5^n + 20 \\ &= 40 - 40 \times 0,5^{n+1} \end{aligned}$$
  On a alors montré que $u_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{u_n = 40 - 40 \times 0,5^n}$$

©ISSN 2272-5318

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 2

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,5 < 1$ et d'après le théorème 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} 40\times(0,5)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 40-40\times 0,5^n = 40$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (u_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 40}$$

3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38μg.L^{-1}.
Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.
On cherche l'entier n tel que :

$$\begin{aligned} u_n \geq 38 &\Longleftrightarrow 40-40\times 0,5^n \geq 38 \\ &\Longleftrightarrow -40\times 0,5^n \geq -2 \\ &\Longleftrightarrow 0,5^n \leq 0,05 \end{aligned}$$

On compose alors par la fonction ln définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\Longleftrightarrow n\ln(0,5) \leq \ln(0,05)$$

On divise alors les deux membres de l'inégalité par $\ln 0,5 < 0$, l'ordre change :

$$\Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,5)} \approx 4,3$$

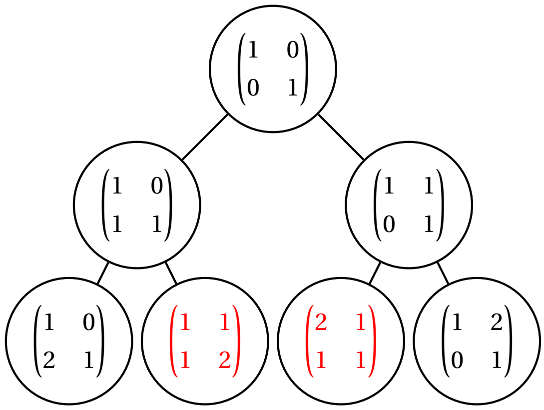
Et puisque n est un entier naturel, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 5.
Le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre est donc de 5.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Spécialité 5 points

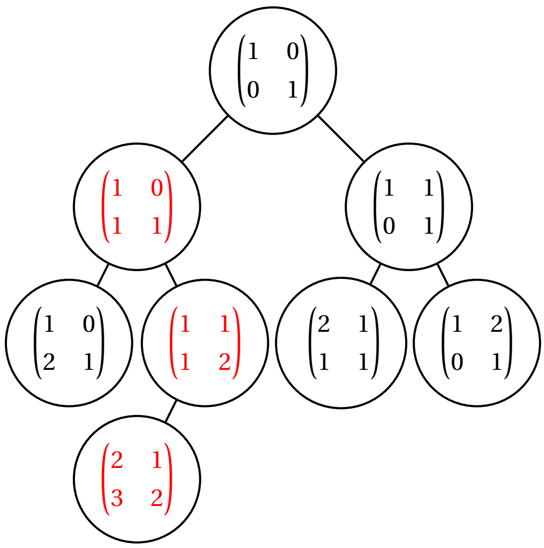
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



$$A = M \times D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = M \times G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$. Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\dfrac{2}{5}$.



Le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice :

$$C = M \times G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond à la fraction :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$$

3. *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *une matrice de l'arbre dont les termes sont des entiers. On note* $\Delta_M = ad - bc$.

3. a. Montrer que si $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

On a par développement :

$$d(a+c) - c(b+d) = da + dc - cb - cd = ad - bc = \Delta$$

Donc si $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_M = d(a+c) - c(b+d) = 1$.

3. b. En déduire que si M est une matrice de l'arbre telle que $\Delta_M = 1$, alors $\Delta_{M\times G} = 1$.

On a :

$$M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$$

Donc

$$\Delta_{M\times G} = d(a+c) - c(b+d)$$

Or on vient de montrer que puisque $\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_M = d(a+c) - c(b+d) = 1$ de ce fait :

$$\boxed{\Delta_{M\times G} = d(a+c) - c(b+d) = 1}$$

On admet que $\Delta_{M\times D} = 1$ *et que toutes les matrices* N *de l'arbre vérifient* $\Delta_N = 1$.

3. c. En déduire que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stem-Brocot est irréductible.

D'après la question (3.b.), pour toutes les matrices N de l'arbre de Stern-Brocot on a :

$$\Delta_N = d(a+c) - c(b+d) = 1 \iff d \times (a+c) + (-c) \times (b+d) = 1$$

Théorème 3 (Bézout, 1730-1883)

Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si,
il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Soit :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = 1 \iff \exists (u\,;\,v) \in \mathbb{Z}^2\,;\ au + bv = 1$$

Remarque : C'est le groupe Bourbaki qui donne vers 1948 le nom de Bézout à ce théorème qui en fait est énoncé et démontré par le mathématicien français Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) dans ses « Problèmes plaisans et délectables » publié en 1624. Bézout démontre lui une généralisation de ce théorème aux polynômes en 1764 dans un mémoire présenté à l'académie des sciences.

D'après le théorème de Bezout, cela signifie que les entiers $(a+c)$ et $(b+d)$ sont premiers entre-eux et donc que la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

©ISSN 2272-5318

4. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant.

4. a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

4. b. Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $n = 4$ et $n = 7$.

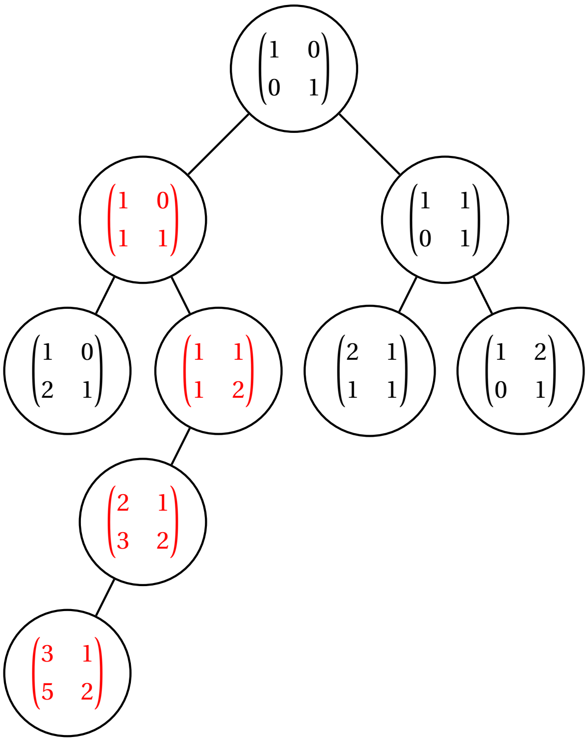
On peut émettre la conjecture suivante :

« l'algorithme fournit le chemin à suivre à partir de la matrice unité pour obtenir une fraction $\frac{m}{n}$ donnée ».

Par exemple pour obtenir la fraction associée $\frac{4}{7}$, il faut suivre le chemin :

« *Gauche-Droite-Gauche-Gauche* »

Ce que l'on peut vérifier :



$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La fraction associée est bien :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{3+1}{5+2} = \frac{4}{7}$$

Exercice 5. Obligatoire — 5 points

Candidats n,'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

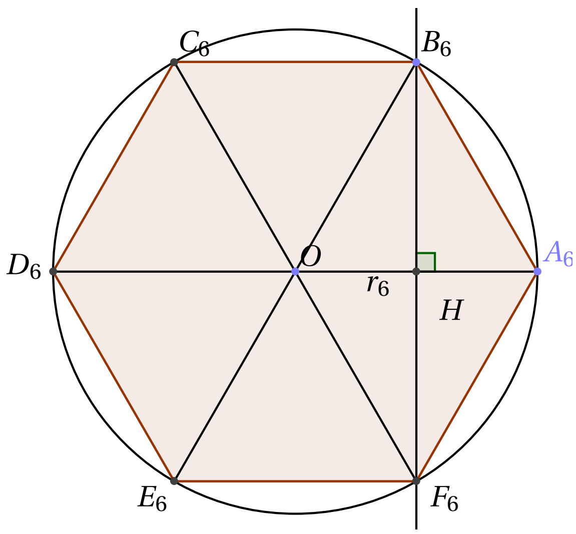
- Les 6 angles au centre de l'hexagone régulier sont tous égaux et mesurent :

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

- Le triangle OA_6B_6 est isocèle en O et son angle au sommet principal $\widehat{A_6OB_6} = \frac{\pi}{3}$. Donc le triangle OA_6B_6 est équilatéral.
- Tous les triangles étant isométriques, ils ont la même aire, or d'après les données, l'aire du polygone est égale à 1. De ce fait l'aire du triangle OA_6B_6 est, exprimée en unités d'aire :

$$\mathscr{A}_{A_6OB_6} = \frac{1}{6}$$

2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue de B_6.



Soit H le pied de la hauteur la hauteur du triangle OA_6B_6 issue de B_6. Le triangle HA_6B_6 est rectangle en H qui est le milieu du segment $[OA_6]$. En effet OA_6B_6 étant équilatéral, hauteur et médiane sont confondues.
De ce fait :

$$\begin{cases} B_6A_6 = OA_6 = r_6 \\ B_6H = \frac{r_6}{2} \end{cases}$$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HA_6B_6 rectangle en H on a alors :

$$\begin{aligned} B_6A_6^2 &= B_6H^2 + HA_6^2 \\ r_6^2 &= B_6H^2 + \left(\frac{r_6}{2}\right)^2 \\ B_6H^2 &= \frac{3}{4} \times r_6^2 \end{aligned}$$

Et puisque B_6H et r_6 sont positifs on obtient la hauteur :

$$\boxed{B_6H = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6}$$

3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

On a vu lors de la question (A.1.) que l'aire du triangle OA_6B_6 était $\mathscr{A}_{A_6OB_6} = \dfrac{1}{6}$ u.a..
Or cette aire s'exprime aussi sous la forme :

$$\mathscr{A}_{A_6OB_6} = \frac{B_6H \times OA_6}{2} = \frac{B_6H \times r_6}{2}$$

On obtient donc avec le résultat de la question (A.2.) :

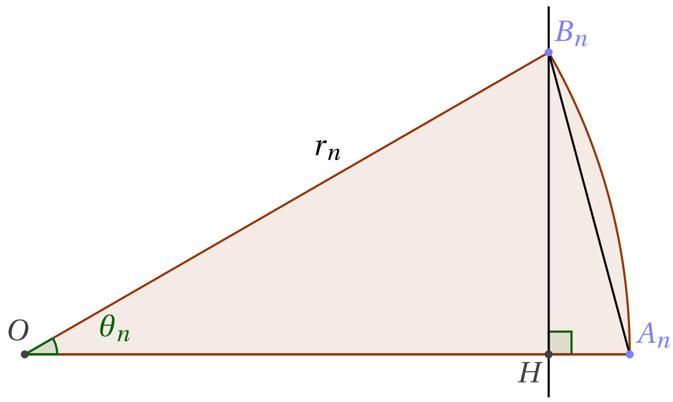
$$\begin{aligned}\frac{1}{6} = \frac{B_6H \times r_6}{2} &\iff \frac{1}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6 \times r_6}{2} \\ &\iff \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_6^2 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3} \\ &\iff r_6^2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}}$$

Partie B : cas général avec $n \geq 4$

1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans OA_nB_n, puis établir que l'aire de ce triangle est $\dfrac{r_n^2}{2}\sin\theta_n$.



Soit H le pied de la hauteur la hauteur du triangle OA_nB_n issue de B_n. Le triangle HA_nB_n est rectangle en H donc :

$$\begin{aligned}\sin(\theta_n) = \frac{B_nH}{OB_n} &\iff \sin(\theta_n) = \frac{B_nH}{r_n} \\ &\iff \underline{B_nH = r_n \sin(\theta_n)}\end{aligned}$$

L'aire du triangle OA_nB_n est alors :

$$\mathscr{A}_{OA_nB_n} = \frac{B_nH \times OA_n}{2} = \frac{r_n \sin(\theta_n) \times r_n}{2}$$

Soit

$$\boxed{\mathscr{A}_{OA_nB_n} = \frac{r_n^2}{2}\sin\theta_n}$$

2. Donner en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}\right)$ puis démontrer que $r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\dfrac{2\pi}{n}}}$.

Les n angles au centre du polygone régulier ont la même mesure donc :

$$\theta_n = \left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}\right) = \frac{2\pi}{n}$$

On sait que l'aire du polygone P_n est égale à 1 de ce fait :

$$\begin{aligned} n \times \mathcal{A}_{OA_nB_n} = 1 &\Longleftrightarrow n \times \frac{r_n^2}{2}\sin\theta_n = 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{n{r_n}^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1 \\ &\Longleftrightarrow {r_n}^2 = \frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)} \\ &\Longleftrightarrow \boxed{r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}} \end{aligned}$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\pi[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$.

On admet que f est strictement croissante sur $]0\,;\pi[$ et que pour tout entier $n \geq 4$ on a : $r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante.

- Montrons que pour tout entier $n \geq 4$ on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

  Pour tout entier $n \geq 4$ on a on composant par la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} 0 < 2 < n < n+1 &\Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow 0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \end{aligned}$$

- Montrons que la suite (r_n) est décroissante.
  Pour tout entier $n \geq 4$ on a :

$$0 < 2 < n < n+1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$$

  On compose alors par la fonction f strictement croissante sur $]0\,;\pi[$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow 0 < f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &\Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{\pi}f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi}f\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

  On compose alors par la fonction racine carré strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{1}{\pi} \times f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\frac{1}{\pi} \times f\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &\Longleftrightarrow 0 < r_{n+1} < r_n \end{aligned}$$

- Conclusion : la suite (r_n) est décroissante (pour $n \geq 4$).

2. En déduire que (r_n) converge.

La suite (r_n) est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers un réel L positif ou nul.

On admet pour la suite que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0,56419$

3. On considère l'algorithme suivant. Quelle valeur de *n* va afficher l'algorithme en sortie ?

L'algorithme détermine le plus petit entier naturel n tel que $r_n \leqslant 0,85$.

La suite (r_n) est décroissante et tend vers une limite $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0,56419 < 0,58$. On sait donc qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite seront inférieurs à 0,58.

Avec la calculatrice on obtient :

$$\begin{cases} r_{10} \approx 0,58\,33 > 0,58 \\ r_{11} \approx 0,57\,99 < 0,58 \end{cases}$$

L'algorithme va donc afficher la valeur $n = 11$.

Fin du devoir