Exercice 1 : (*commun à tous les candidats*) : 6 points.

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.

On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout réel positif t, $p\left(Y \leq t\right) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Dans les questions 2, 3, et 4 les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Pré-requis : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Montrer que, pour tous réels positifs s et t, $P_{X \geq t}(X \geq s+t) = P(X \geq s)$.
2. Exprimer. $p\left(Y \leq 1\right)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ

   Pour la suite de l'exercice, on prendra λ = 0,128.
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
4. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
5. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\lim\limits_{t \to +\infty} F\left(t\right)$ où F est la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par $F\left(t\right) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

   a. On note g la fonction dérivable $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = -xe^{-\lambda x}$.
   Montrer que : $\lambda x e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x} + g'(x)$. En déduire $F\left(t\right)$ en fonction de t.

   b. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$. En déduire la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

Exercice 2 : (*commun à tous les candidats*) : 6 points.

Partie A

On considère l'algorithme suivant : les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Saisir le nombre entier naturel non nul N
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N -1
Affecter à U la valeur 3U - 2k + 3
Fin pour
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. **a**. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit *p* un entier naturel non nul.

a. Peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

b. On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0. Justifier que $n_0 \leq 3p$.

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de *p* donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

Exercice 3 : *(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*) : 5 points.

Soit *f* la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1)$. On pose, pour $x > -1$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1. Justifier que la fonction F est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et donner sa fonction dérivée F'.

2. Pour approcher des valeurs de *F(x), o*n donne l'algorithme suivant :

```
Saisir (n , h)
x prend la valeur 1
y prend la valeur 2×ln(2)-1
Afficher les coordonnées du point M0(x ,y)
  Pour k de 1 jusque n faire
  |   y prend la valeur y+ h ×f(x)
  |   x prend la valeur x+h
  |   afficher les coordonnées (x,y) des points Mk
  finpour
```

a. Exécuter cet algorithme « à la main », pour des entrées de *n* = 5 et *h* = 0,2 pour compléter le tableau 1 (donné en annexe). On donnera les valeurs exactes.

b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (M_1M_2) ?

c. Compléter le tableau 2 (donné en annexe). On donnera des valeurs approchées au centième près.

3. **a**. Montrer que $F(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

b. Etudier le sens de variation de la fonction *F* sur $]-1;+\infty[$

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-1^+} F(x)$

4. Donner la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 3 : ***(candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*****) : 5 points.**

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation (E) $11x - 5y = 14$ et déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. **a**. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1 \left[\text{mod } 7 \right]$.

   b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. Le principe de chiffrement de Hill :

   On associe à chaque lettre de l'alphabet un entier de l'ensemble $E = \{0;1;2;3;........;25\}$.

   On se donne pour clé de chiffrement la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On va chiffrer le mot « INDICE », ce qui donne 8 – 13 – 3 – 8 – 2 - 4 . On regroupe ensuite les lettres deux à deux et on forme les matrices colonnes $U_1\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$, $U_2\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ *et* $U_3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer les matrices $V_1 = AU_1$, $V_2 = AU_2$ *et* $V_3 = AU_3$.

   b. En remplaçant chaque coefficient de ces matrices colonnes V_1, V_2 *et* V_3 par son représentant dans E modulo 26 déterminer le mot codé correspondant à « INDICE »

4. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left[\frac{A}{N}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que $N \leq \sqrt{A}$
Si $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left[\frac{A}{N}\right] = 0$ *alors*
Afficher N et $\frac{A}{N}$
Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.

a. Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

b. Que donne cet algorithme dans le cas général ?

Exercice 4 : (*commun à tous les candidats*) : 3 points.

Recopier la bonne réponse. (Les mauvaises réponses ne sont pas sanctionnées)

1. Dans un supermarché un jour de grande affluence, le temps d'attente T à la caisse, en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle [2 ; 20]. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à un quart d'heure est :

   $\frac{15}{18}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{1}{15}$.

2. On admet que la fonction *f*, définie par $f(x) = \frac{x}{2}$ *si* $0 \leq x \leq 2$ et 0 sinon, est une densité de probabilité.

   Si X est une variable aléatoire de densité *f* alors : $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) =$

   $\frac{1}{16}$; $\frac{2}{16}$; $\frac{3}{16}$

3. On considère l'équation (E) : $2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$. Alors, sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'équation (E) admet comme ensemble de solutions :

   $\left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$; $\left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$; $\left\{\frac{-2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation suivante : $\ln(x^2 + 2x) \leq \ln(x + 2)$ est :

   [-2 ; 1] ; $]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$;]0 ; 1]

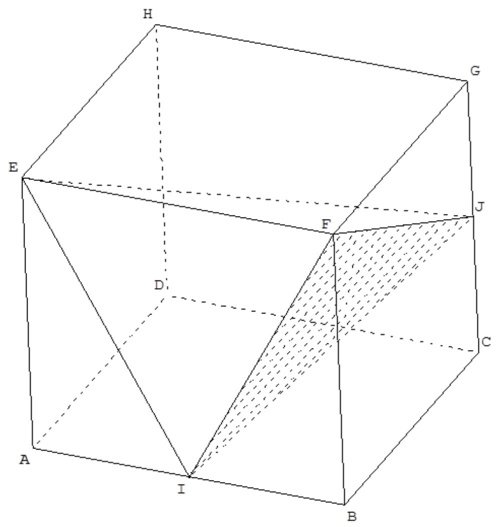
Les deux questions 5 et 6 se rapportent au cube ci-dessous :

5. La section du cube ABCDEFGH par le plan (IFJ), I et J sont les milieux des arêtes (AB) et (CG), est :

   Un triangle rectangle isocèle ; Un triangle équilatéral ; un trapèze.

6. Les deux droites (IF) et (DH) sont :

   Parallèles ; sécantes ; non coplanaires



Annexe de l'exercice 3 à rendre avec votre copie :
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Nom : ………………………………………. Prénom :………………………. Classe : ………………..

Tableau 1 :

	M_0	M_1	M_2
x	1		
y	$2\ln(2) - 1$		

Tableau 2 :

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
x						
y						