Exercice 1

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (20x + 10)e^{-0,5x}$.

1. $f(x) = 20x\,e^{-0,5x} + 10e^{-0,5x}$.

On a d'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} (20x\,e^{-0,5x}) = \lim\limits_{X \to -\infty} (-40\,X\,e^{X}) = 0$, en posant $X = -0,5x$ ou

$x = -2X$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} X = -\infty$ et sachant que $\lim\limits_{X \to -\infty} (X\,e^{X}) = 0$.

On a de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} (10e^{-0,5x}) = \lim\limits_{X \to -\infty} (10e^{X}) = 0$, en posant $X = -0,5x$.

Par somme, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **0,5 pt**

2. f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ dont une est de la forme e^{u} avec u dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

On a pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = 20\,e^{-0,5x} + (20x + 10)(-0,5)\,e^{-0,5x} =$
$(-10x + 15)\,e^{-0,5x} = 5(3 - 2x)\,e^{-0,5x}$.

Comme pour tout x de $[0 ; +\infty[$ $e^{-0,5x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $3 - 2x$. On a ainsi le tableau des variations de f sur $[0 ; +\infty[$: **1 pt**

x	0		$1,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	10	$\nearrow$	$40e^{-0,75}$	$\searrow$	0

3. * Sur $]0 ; 1,5[$ f est strictement croissante avec $f(0) = 10$ donc $f(x) > 10$;
l'équation $f(x) = 10$ n'a donc pas de solution sur $]0 ; 1,5[$.

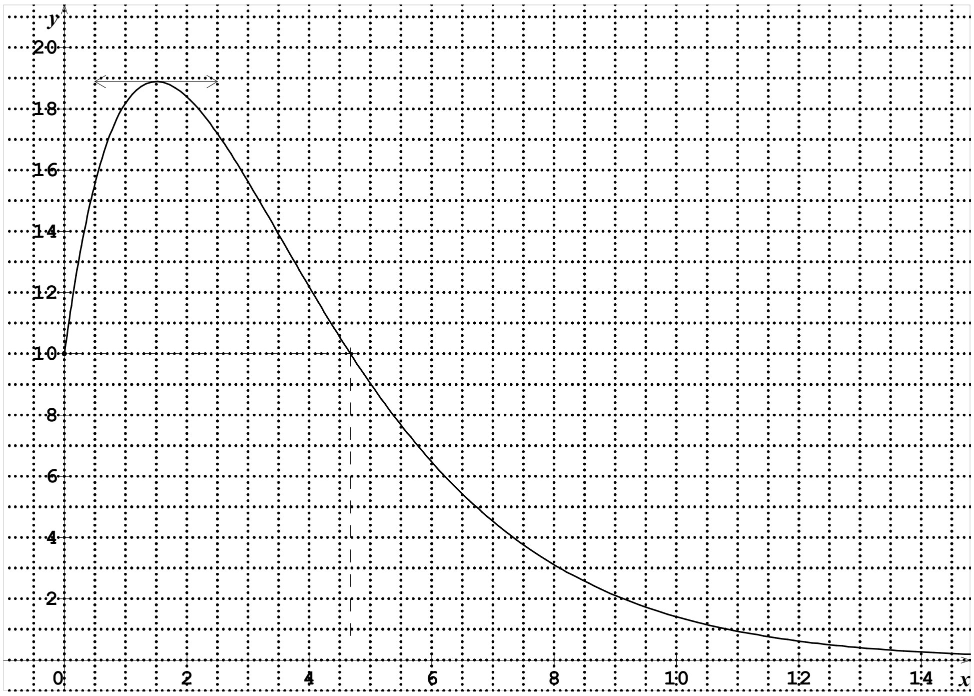
* Sur $[1,5 ; +\infty[$ f est continue(car dérivable) et strictement décroissante ;
$f([1,5 ; +\infty[) =]0 ; 40e^{-0,75}]$; or $10 \in]0 ; 40e^{-0,75}]$ donc l'équation $f(x) = 10$ admet une et une seule solution dans $[1,5 ; +\infty[$.

* Sur $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 10$ admet donc une unique solution notée α.

Grâce à la calculatrice, on trouve que $f(4,6) \approx 10,2$ et $f(4,7) \approx 9,9$ puis que $f(4,67) \approx 10,01$ et $f(4,68) \approx 9,98$, puis que $f(4,673) \approx 10,0001$ et $f(4,674) \approx 9,998$ donc

$\boxed{4,673 \leq \alpha \leq 4,674}$. **1 pt**

4. <u>Courbe représentative de f</u>



0,5 pt

Partie B

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20\ e^{-0,5t}$.

1. On vérifie que u est solution de (E) : u est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout réel t de $[0 ; +\infty[$

$u'(t) + \frac{1}{2}u(t) = 20\ e^{-0,5t} - 10t\ e^{-0,5t} + 10t\ e^{-0,5t} = 20\ e^{-0,5t}$).

u est bien solution sur $[0 ; +\infty[$ de (E). **0,5 pt**

2. a) Soit (E') : $y' + \frac{1}{2}y = 0$; $g - u$ est solution de (E') $\Leftrightarrow (g-u)' + \frac{1}{2}(g-u) = 0$

$\Leftrightarrow g' + \frac{1}{2}g = u' + \frac{1}{2}u \Leftrightarrow$ pour tout t de $[0 ; +\infty[$ $g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = 20\ e^{-0,5t}$ car u est solution de (E). $\Leftrightarrow$ g est solution de (E). Cqfd **1 pt**

b) Les solutions de (E') sont toutes les fonctions de la forme $t \longrightarrow C\ e^{-0,5t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

c) g est solution de (E) $\Leftrightarrow g - u$ solution de (E')

$\Leftrightarrow$ pour tout t de $[0 ; +\infty[$ $g(t) - u(t) = C\ e^{-0,5t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions sur $[0 ; +\infty[$ de (E) sont les fonctions $t : \longmapsto C\ e^{-0,5t} + 20t\ e^{-0,5t}$. **0,5 pt**

y est solution de (E) donc pour tout t de $[0 ; +\infty[$ $y(t) = C\ e^{-0,5t} + 20t\ e^{-0,5t}$.

De plus $y(0) = 10$ donc $C = 10$

et $\boxed{\text{pour tout } t \text{ de } [0 ; +\infty[\ \ y(t) = (20t + 10)e^{-0,5t} = f(t)}$. **0,5 pt**

3. On cherche une valeur de t telle que $y(t) \leq 10$. D'après la partie A et l'étude des variations de $f = y$, à partir de $t \approx 4{,}673$ soit à partir de $t \approx$ 4h 40mn la température de la réaction chimique reviendra à 10°. **0,5 pt**

Exercice 2

Soit les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = \sqrt{3} + i$.

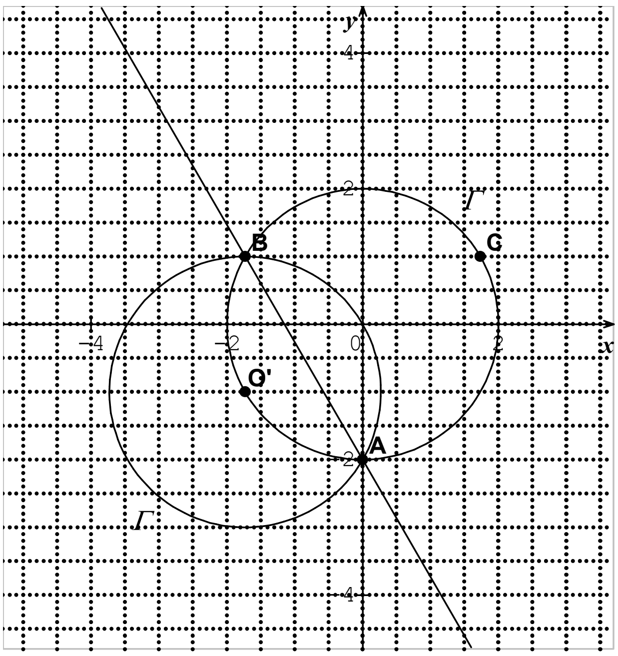
1. a) $z_A = 2e^{-i\pi/2}$

$|z_B| = \sqrt{3+1} = 2$ et $z_B = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i5\pi/6}$

$|z_C| = 2$ et $z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\pi/6}$. **1 pt**

b) z_A, z_B, z_C ont pour module 2, OA = OB = OC = 2 donc A, B et C sont sur le même cercle Γ de centre O et de rayon 2. **0,25 pt**

c)



0,25 pt

2. a) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{3 + 9} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$. **0,75 pt**

b) $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|e^{i\pi/3}\right| = 1$ donc $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ donc AB = AC

et $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(e^{i\pi/3}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

Le triangle ABC est isocèle en A de plus l'un de ses angles a pour mesure $\frac{\pi}{3}$; ABC est donc équilatéral. **0,5 pt**

3. Soir r la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$. r a pour expression complexe :

$z' - z_A = e^{i\pi/3}(z - z_A)$.

a) pour z = 0, on a $z' + 2i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (2i) \Leftrightarrow z' = -\sqrt{3} - i = z_{O'}$. **0,5 pt**

b) $z_{O'} = -z_C$. O' et C sont symétriques l'un de l'autre par rapport à O : ils sont donc diamétralement opposés sur Γ. **0,25 pt**

c) Γ' image de Γ par r, est le cercle de centre O' = r(O) et de rayon 2. cf figure. **0,25 pt**

d) le point A est invariant par r. Comme A est sur Γ, il est aussi sur Γ'.

B = r(C) d'après b) ; or C est sur Γ donc B est sur Γ'. De plus B est sur Γ.

Ainsi les deux points A et B sont communs aux deux cercles Γ et Γ'qui ne sont pas confondus. <u>Γ et Γ' sont donc sécants en A et B</u>. **0,5 pt**

4. a) $|z| = |z + \sqrt{3} + i| \Leftrightarrow$ OM = O'M. L'ensemble des points M cherché est donc la médiatrice du segment [OO']. **0,5 pt**

b) Or AO = AO' = 2 et OB = O'B = 2. A et B sont sur la médiatrice du segment [OO'], qui est donc la droite (AB). <u>(E) = (AB).</u> **0,25 pt**

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n de ℕ, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. a) $u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + 0 - 1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 - 1 = -\frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 - 1 = \frac{7}{8}$

Soit (P_n) la propriéte : $u_n \geq 0$, à démontrer par récurrence.

* P_3 est vérifiée.

* Soit n un entier quelconque fixé supérieur à 3 ; si on a P_n c'est-à-dire si $u_n \geq 0$ alors $\frac{1}{2}u_n \geq 0$ et comme $n \geq 3$, $n - 1 \geq 2$ et donc $u_{n+1} \geq 0$; P_{n+1} est alors vérifiée : (P_n) est héréditaire.

* P_3 est vérifiée et (P_n) est héréditaire donc pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$. **0,5 pt**

b) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + n - 2$. **0,25 pt**

c) Pour $n \geq 4$, $n - 1 \geq 3$ et $u_{n-1} \geq 0$ d'après **a)** d'où $u_n \geq n - 2$ d'après **b)**. **0,5 pt**

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-2) = +\infty$ et $u_n \geq n - 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. **0,5 pt**

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

a) pour tout n de $\mathbb{N}$ $v_{n+1} = 4\, u_{n+1} - 8(n+1) + 24$

$$v_{n+1} = 4\left(\frac{1}{2} u_n + n - 1\right) - 8n + 16 = 2u_n - 4n + 12 = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \frac{1}{2} v_n.$$ **1 pt**

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 4u_0 - 8\times 0 + 24 = 28$.

b) pour tout n de $\mathbb{N}$ $v_n = 28\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $u_n = \frac{v_n + 8n - 24}{4} = \frac{v_n}{4} + 2n - 6 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c) pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. On pose $x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $y_n = 2n - 6$. (x_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^er^ terme 7 et (y_n) une suite arithmétique de raison 2 et de 1^er^ terme -6. **0,5 pt**

d) pour tout n de $\mathbb{N}$ soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k + \sum\limits_{k=0}^{n} y_k = 7\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{(n+1)(-6+2n-6)}{2}$

$$\boxed{S_n = 14\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-6)}$$ **1 pt**

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x(1 - \ln x)$.

1. Comme x est strictement supérieur à zéro, le signe de $f(x)$ est celui de $1 - \ln x$.

Or $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow x < e$. On a donc : **0,75 pt**

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	+	0	−	

2. • Au voisinage de zéro : $f(x) = x - x\ln x$.

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$, par somme des limites on obtient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. **0,5 pt**

• Au voisinage de plus l'infini : On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$. Par produit des limites on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. **0,5 pt**

Remarque : la lecture de l'annexe correspond bien à ces résultats.

3. f étant le produit de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \ln x + x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$. **0,5 pt**

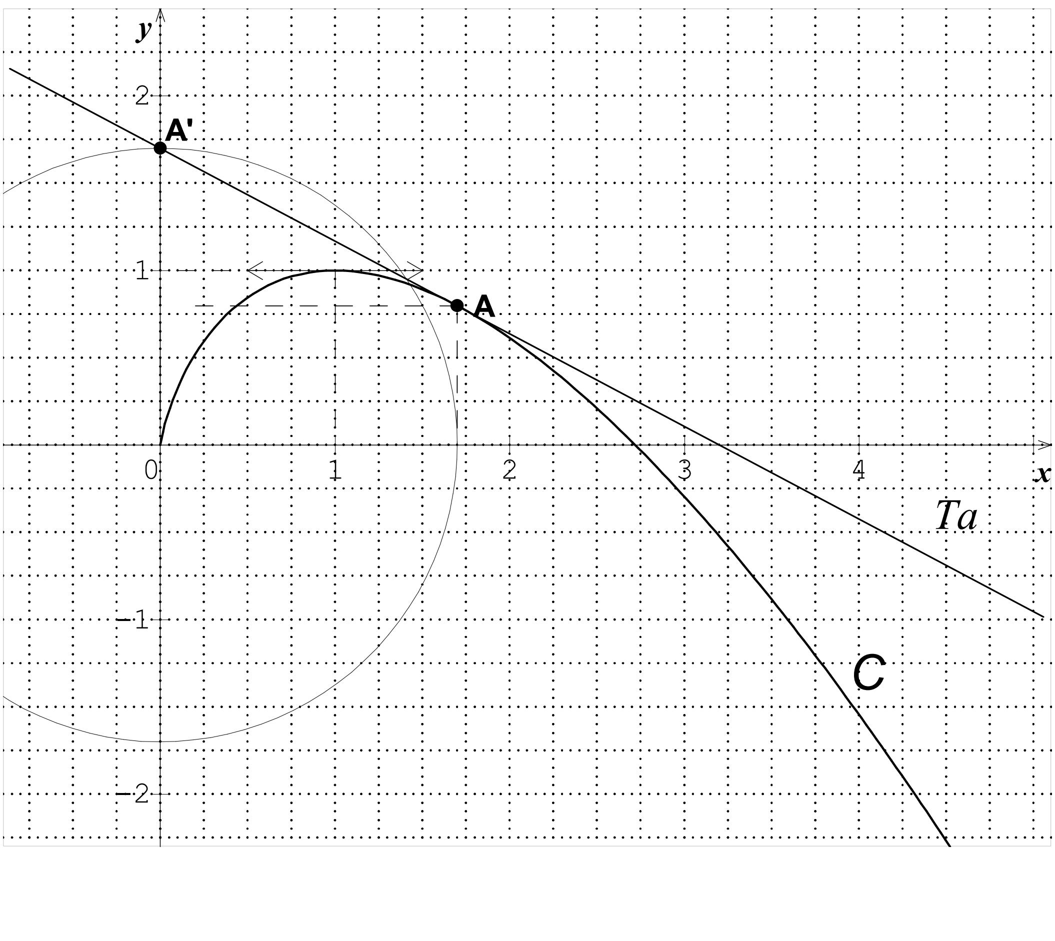
Or $-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Conclusion : on a le tableau des variations suivant : **0,5 pt**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. a) On a $M(x\,;y) \in (T_a) \Leftrightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a) \Leftrightarrow y = -\ln a(x - a) + a - a\ln a \Leftrightarrow$ $y = -x\ln a + a$. Le point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle, d'où $y = a$ est l' ordonnée du point A'.On a $\boxed{\text{A}'(0\,;a)}$ **0,75 pt**

b) Pour faire la figure, il suffit de tracer le quart de cercle centré en O de rayon a qui coupe l'axe des ordonnées au point A'(0 ; a). La tangente est la droite (AA').



0,5 pt