DEVOIR SURVEILLE N°1 : CORRIGE

Exercice 1 :

Remarque : La fonction f définie sur [0 ; +∞[par f(x) = $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ est croissante comme composée d'une fonction affine croissante et de la fonction racine carrée croissante sur son domaine.

1- Soit pour tout entier naturel n la propriété : P(n) : « $0 \leq U_n \leq 1$ ».
Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation : $U_0 = 0,5$ donc $0 \leq U_0 \leq 1$. P(0) est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. On suppose P(n) vraie, montrons que P(n+1) est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $0 \leq U_n \leq 1$; en appliquant la fonction f qui est croissante, on obtient :
$\sqrt{\frac{1}{2}} \leq f(U_n) \leq 1$, donc $0 \leq U_{n+1} \leq 1$. Cqfd.
Conclusion : La propriété est vraie pour n = 0, elle est héréditaire pour tout entier naturel n, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2- Soit pour tout entier naturel n la propriété : Q(n) : « $U_n \leq U_{n+1}$ ».
Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation : $U_0 = 0,5$, $U_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $U_0 \leq U_1$. Q(0) est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. On suppose Q(n) vraie, montrons que Q(n+1) est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $U_n \leq U_{n+1}$; en appliquant la fonction f qui est croissante, on obtient :
$f(U_n) \leq f(U_{n+1})$, donc $U_{n+1} \leq U_{n+2}$. Cqfd.
Conclusion : La propriété est vraie pour n = 0, elle est héréditaire pour tout entier naturel n, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

(U_n) est croissante majorée par 1, elle converge donc vers un réel L tel que $0 \leq L \leq 1$.

3- Pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$, donc par passage à la limite : $L = \sqrt{\frac{1+L}{2}}$.

On a donc : $L^2 = \frac{1+L}{2}$ et $L \geqslant 0$. En résolvant l'équation du second degré, on obtient L = 1.

4- Considérons la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$.

On a : $V_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel n : $V_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right) \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+V_n}{2}}$

pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$

La suite (V_n) est donc la suite (U_n).

Remarque : On peut également démontrer le résultat par récurrence.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3\times 2^n} \underset{\uparrow}{=} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 1$

limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Exercice 2 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 4V_n}{5} \end{cases}$

1- Soit un entier naturel n. On a : $d_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \dfrac{U_n + 4V_n}{5} - \dfrac{U_n + V_n}{2} = \dfrac{3V_n - 3U_n}{10} = \dfrac{3}{10} d_n$.

La suite (d_n) est donc géométrique de raison 0,3 et de terme initial $d_0 = 3$.
On en déduit que pour tout entier naturel n : $d_n = 3\times 0{,}3^n$.

2- Soit un entier naturel n.
Remarque : D'après la question précédente, $d_n \geqslant 0$.

- $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n + V_n}{2} - U_n = \dfrac{V_n - U_n}{2} = \dfrac{d_n}{2} \geq 0$. La suite ($U_n$) est donc croissante.
- $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n + 4V_n}{5} - V_n = \dfrac{U_n - V_n}{5} = -\dfrac{d_n}{5} \leq 0$. La suite ($V_n$) est donc décroissante.
- La suite (d_n) étant géométrique de raison 0,3 $\in$]-1 ; 1[, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$.

De ces trois points, on déduit que (U_n) et (V_n) sont des suites adjacentes.

3- a) Soit n un entier naturel. $s_{n+1} = 2U_{n+1} + 5V_{n+1} = 2\times\dfrac{U_n + V_n}{2} + 5\times\dfrac{U_n + 4V_n}{5} = 2U_n + 5V_n = s_n$.
On en déduit que la suite (s_n) est constante et pour tout n : $s_n = 2U_0 + 5V_0 = 8$.

b) les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, donc d'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite L.
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(2U_n + 5V_n) = 7L$. ; et comme pour tout n : $s_n = 2U_0 + 5V_0 = 8$, on déduit : $L = \dfrac{8}{7}$.

Exercice 3 :

Soit (U_n) une suite croissante non majorée.
(U_n) n'étant pas majorée, quel que soit le réel A il existe un entier N tel que $U_N > A$.
La suite étant croissante, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant N$ alors $U_n \geqslant U_N > A$.
Ainsi la suite (U_n) est aussi grande que l'on veut, pour n suffisamment grand : elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 4

1- Les suites (U_n) et (W_n) convergeant, elles sont bornées, il en est donc de même de la suite (V_n).
On ne peut pas dire à priori si la suite (V_n) converge :
Exemples :

- Si $U_n = -2$, $W_n = 2$, et $U_n = (-2)^n$, les conditions de l'énoncé sont satisfaites, et (U_n) diverge.
- Si $U_n = -2$, $V_n = 0$, et $W_n = 2$, les conditions de l'énoncé sont satisfaites, et (U_n) converge.

Par contre, en vertu des théorèmes de comparaison, si (V_n) converge sa limite sera dans l'intervalle [-2 ; 2].

2- Les suites (U_n) et (W_n) ne peuvent pas être adjacentes puisqu'elles ont les mêmes variations du fait de l'égalité $W_n = 2U_n$.
En vertu du théorème des gendarmes, la suite (V_n) converge vers 0.
Comme pour tout entier naturel n : $U_n \leq V_n \leq W_n$, on en déduit que $W_n - U_n \geqslant 0$.
Comme $W_n = 2U_n$, on a : $W_n - U_n = U_n \geqslant 0$.

3- En vertu du théorème de majoration, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.
On en déduit de plus que la suite (U_n) est majorée, puisqu'elle est négative pour n suffisamment grand, et que le nombre de ses termes positifs est donc fini. La suite est donc majorée par le plus grand de ses termes positifs, ou par 0 si tous ses termes sont négatifs.

On ne peut rien dire sur la limite éventuelle de W_n.

4- $U_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2} = 2 - \dfrac{1}{n^2}$ donc, en vertu des variations et des limites des fonctions usuelles, la suite (U_n) est croissante, et converge vers 2 ;

$W_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2} = 2 + \dfrac{1}{n^2}$ donc, en vertu des variations et des limites des fonctions usuelles, la suite (W_n) est décroissante, et converge vers 2.

On déduit de ce qui précède que les suites (U_n) et (W_n) sont adjacentes.
Par le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$.