Devoir à la maison n°11

Corrigé

1. Étude d'un exemple

Une urne contient 5 boules rouges et 6 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait **simultanément** 5 boules de cette urne.
X est la variable aléatoire qui dénombre, parmi les 5 boules tirées, les boules rouges obtenues.

Modélisation – L'expérience aléatoire consiste à extraire une combinaison de 5 boules prises parmi 11 : on peut donc associer à cette expérience l'univers Ω constitué des combinaisons de 5 boules prises parmi 11 et le cardinal de Ω est $\binom{11}{5}$.
Les boules étant indiscernables au toucher, Ω peut être muni de l'équiprobabilité : pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $p(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

(a) Il y a 5 boules rouges et 6 boules blanches dans l'urne : quand on choisit dans cette urne 5 boules simultanément, il peut y avoir 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 boules rouges.

(b) Soit $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. L'événement $(X = k)$ est réalisé par l'obtention d'une combinaison contenant k boules rouges et $5 - k$ boules blanches.
Pour choisir simultanément k boules rouges parmi 5, on a $\binom{5}{k}$ possibilités. Pour chacune de ces possibilités, on a ensuite $\binom{6}{5-k}$ choix possibles pour compléter notre combinaison. Ainsi, le cardinal de $(X = k)$ est $\binom{5}{k}\binom{6}{5-k}$.
Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$p(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{11}{5}}$$

(c) On sait que :

$$\sum_{k=0}^{5} p(X = k) = 1$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{5}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{11}{5}} = 1$$

$$\frac{1}{\binom{11}{5}} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}\binom{6}{5-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}\binom{6}{5-k} = \binom{11}{5}$$

(d) Avec un peu de patience, l'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} kp(X = k) = \frac{25}{11}$.

2. **Généralisation**

La modélisation est la même que dans la partie 1, mais ici le cardinal de Ω est $\binom{a+b}{b}$.

(a) L'ensembles des valeurs prises par X est $\{0, 1, \ldots, b\}$.

(b) Comme ci-dessus, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, b\}$, $p(X = k) = \dfrac{\binom{b}{k}\binom{a}{b-k}}{\binom{a+b}{b}}$.

(c) De $\displaystyle\sum_{k=0}^{b} p(X = k) = 1$, on déduit que si a et b désignent des entiers naturels non nuls tels que $b \leqslant a$, alors : (1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k}\binom{a}{b-k} = \binom{a+b}{b}$.

(d) Calcul de l'espérance de X

i. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant b$.
$k\binom{b}{k} = k\dfrac{b!}{k!(b-k)!} = b\dfrac{(b-1)!}{(k-1)!(b-k)!} = b\dfrac{(b-1)!}{(k-1)!(b-1-(k-1))!} = b\binom{b-1}{k-1}$.

ii. L'égalité (1) est valable pour tous entiers naturels a et b non nuls tels que $b \leqslant a$.
• Si $b > 1$, alors $b - 1 \in \mathbb{N}^*$ et $b - 1 \leqslant a$: on peut appliquer (1) avec a et $b - 1$ et le résultat s'ensuit.
• Si $b = 1$, alors $b - 1 = 0$ et d'une part :

$$\sum_{k=0}^{b-1} \binom{b-1}{k}\binom{a}{b-k-1} = \sum_{k=0}^{0} \binom{b-1}{k}\binom{a}{b-k-1} = 1$$

D'autre part :

$$\binom{a+b-1}{b-1} = 1$$

Ainsi, l'égalité demandée est vraie dans tous les cas.

iii. Calcul de l'espérance de X.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{b} k\frac{\binom{b}{k}\binom{a}{b-k}}{\binom{a+b}{b}} \\
&= \frac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum_{k=1}^{b} k\binom{b}{k}\binom{a}{b-k} \\
&= \frac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum_{k=1}^{b} b\binom{b-1}{k-1}\binom{a}{b-k} \\
&= \frac{b}{\binom{a+b}{b}} \sum_{k=1}^{b} \binom{b-1}{k-1}\binom{a}{b-k} \\
&= \frac{b}{\binom{a+b}{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \binom{b-1}{k}\binom{a}{b-1-k} \\
&= \frac{b}{\binom{a+b}{b}} \binom{a+b-1}{b-1} \\
&= \frac{b^2}{a+b}
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en utilisant la formule donnant $\binom{n}{p}$ en fonction des factorielles et en simplifiant.