Devoir à la maison n°3
Corrigé

1. Dans cette question, on cherche à déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :
$$(1+x^2)f'(x) - 2xf(x) = 0$$
   (a) La fonction $u : x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout réel x, $u'(x) = 2x$.
   Il s'ensuit que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad , (1+x^2)u'(x) - 2xu(x) = 0$$
   et que donc, u est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.

   (b) Soit f une solution de $(1+x^2)y' - 2xy = 0$: f est par nature dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^2+1}$: g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{f'(x)(1+x^2) - 2xf(x)}{(1+x^2)^2} = 0$, puisque$f$ est solution sur $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.

   (c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est identiquement nulle : on en déduit que g est constance sur $\mathbb{R}$:
$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad , \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(x)}{x^2+1} = k$$
   Ainsi, SI f est solution de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = 0$, ALORS il existe une constante réelle k telle que $f = ku$.

   (d) Réciproquement, s'il existe un réel k tel que $f = ku$, alors on vérifie sans difficulté que f est solution de $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.
   On en déduit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = 0$ est constituée des fonctions f, de la forme ku, k décrivant $\mathbb{R}$.

   (e) Soit f une solution de $(1+x^2)y' - 2xy = 0$: il existe donc un réel k tel que $f = ku$.
   $f(0) = 1 \Leftrightarrow k(0^2+1) = 1 \Leftrightarrow k = 1$.
   Il existe donc une unique fonction répondant au problème : c'est u.

2. On considère maintenant l'équation différentielle du premier ordre $y' = y$ et on veut la résoudre sur $\mathbb{R}$.

   (a) La fonction exponentielle est une solution du problème.

   (b) Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = y$. et $h : x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et pour tout réel x, $h'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-x} - f(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$ puisque $f' = f$.
   On en déduit que h est constante sur $\mathbb{R}$.

   (c) Ainsi, si f est solution de $y' = y$ sur $\mathbb{R}$, il existe un réel k tel que pour tout x, $f(x)\mathrm{e}^{-x} = k$, soit encore, $f(x) = k\mathrm{e}^{x}$.
   Réciproquement, quel que soit $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto k\mathrm{e}^{x}$ vérifie l'équation différentielle $y' = y$.
   On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y$ est constitué des fonction $x \mapsto k\mathrm{e}^{x}$, k décrivant $\mathbb{R}$.

3. Soit $v : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et f une solution de $y'' = x$. Par définition f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ainsi, $f - v-$ l'est aussi : sa dérivée seconde est nulle. On en déduit alors que $f' - v'$ est constante et que $f - v$ est une fonction affine.
   Ainsi, f est de la forme $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + ax + b$, a et b décrivant $\mathbb{R}$.
   Réciproquement, on vérifie que les fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + ax + b$, a et b décrivant $\mathbb{R}$ sont solutions de $y'' = x$.