Devoir à la maison n°2
Corrigé

Exercice 1.

• Soit r le rayon du cercle.

L'aire du secteur circulaire saillant ABE est $\pi\frac{r^2}{2}\alpha$.
(DB) est tangente à $\mathcal{C}$ en B dont les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires : ABD est donc rectangle en D et il s'ensuit que $BD = R\tan\alpha$ et que l'aire du triangle ABD est $\frac{r^2}{2}\tan\alpha$.
L'aire gris clair vaut donc $\frac{r^2}{2}\tan\alpha - \pi\frac{r^2}{2}\alpha$ et on cherche à résoudre :

$$\frac{r^2}{2}\tan\alpha - \pi\frac{r^2}{2}\alpha = \pi\frac{r^2}{2}\alpha$$

ce qui équivaut à $\tan\alpha = 2\alpha$.

•• Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x - 2x$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (ici, on ne peut considérer l'image de 0 par f puisque $0 \notin I$.)
$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x) = +\infty$.

f est dérivable, donc continue, sur I en tant que différence de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Pour tout $x \in I$, $f(x) = 1 + \tan^2 x - 2 = \tan^2 x - 1 = (\tan x - 1)(\tan x + 1)$.

Or sur I, $\tan x + 1 > 0$ et par ailleurs :
• $\tan x - 1 = 0$ ssi $x = \frac{\pi}{4}$
• $\tan x - 1 > 0$ ssi $x > \frac{\pi}{4}$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖	0 $\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$	‖

••• Sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) < 0$.
Sur $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, f est continue et prend des valeurs positives et négatives. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Comme f est strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, α est unique.
On en déduit que l'équation $\tan x - 2x = 0$ admet une unique solution sur I.
Par la calculatrice, il apparaît que $f(1,16) < 0 < f(1,17)$. f étant strictement croissante, il vient $1,16 < \alpha < 1,17$.

Exercice 2. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0;1]$ en tant que différence de fonctions continues.

$g(0) = f(0) \geqslant 0$ puisque $f(0) \in [0;1]$.
$g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puique $f(1) \in [0;1]$.

g prend donc des valeurs positives et négatives sur $[0;1]$: le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un réel c tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

Si maintenant on remplace l'intervalle fermé $[0;1]$ par l'intervalle ouvert $]0;1[$, le résultat est en défaut. En effet, la fonction $x \mapsto x^2$ est bien continue sur $]0;1[$, à valeurs dans $]0;1[$, mais l'équation $x^2 = x$ n'a pas de solution dans cet intervalle.