Devoir à la maison n°1
Corrigé

Exercice 1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$. On appelle Γ sa courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x)$ est défini ssi $x^2+x+1 \neq 0$.
   Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+x+1=0$: cette équation du second de degré a pour discriminant le nombre -3, qui est strictement négatif et ainsi, pour tout réel x, $x^2+x+1 \neq 0$: $D = \mathbb{R}$.
2. A l'infini, une fonction rationnelle se comporte comme le quotient des termes de plus haut degré dans son numérateur et dans son dénominateur.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{x^3}{x^2} = x$ et donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3. Pour tout réel x,
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x^2+x+1)-x^2-x}{x^2+x+1} \\ &= x - \frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1} \\ &= x-1+\frac{1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$
4. Pour tout $x\ in\mathbb{R}$, $f(x)-x = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ et de façon évidente, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+x+1} = 0$.
   Cela prouve que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à Γ en plus et moins l'infini.
5. Le trinôme x^2+x+1 a un discriminant strictement négatif et il est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$, ce signe étant indiqué par le coefficient de x^2 qui est 1. Il s'ensuit que pour tout réel x, $f(x)-x > 0$ et que sur $\mathbb{R}$, Γ est au dessus de Δ

***

Exercice 2. Soit m un nombre réel fixé.
Le degré du numérateur de la fraction rationnelle $u(x)$ est 2 si $m^2-m \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

1er cas : $m \neq 0$ et $m \neq 1$. Dans ce cas, le degré du dénominateur de $u(x)$ est 2 aussi et en $+\infty$, cette fraction se comporte comme le quotient $\dfrac{m^2-m}{m-1} = m$.
La limite de u en $+\infty$ est m.
2e cas : $m = 0$. Dans ce cas, $u(x) = \dfrac{1}{-x^2+x-2}$ et en $+\infty$, la limite de cette expression est 0.
3e cas : $m = 1$. Dans ce cas, $u(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$ et en $+\infty$, la limite de cette expression vaut 2.