NOM : Jeudi 21 Avril 2011

INTERROGATION SUR LE CALCUL INTEGRAL

Exercice 1 :

1. Question de cours :

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues.

2. Soient les deux intégrales $I = \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos(x)\,dx$.

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et J.

Exercice 2 :

1. Question de cours :

Pré requis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

2. a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale : $\int_1^x (2-t)\,dt$.

b) Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$, on a : $2 - t \leqslant \frac{1}{t}$.

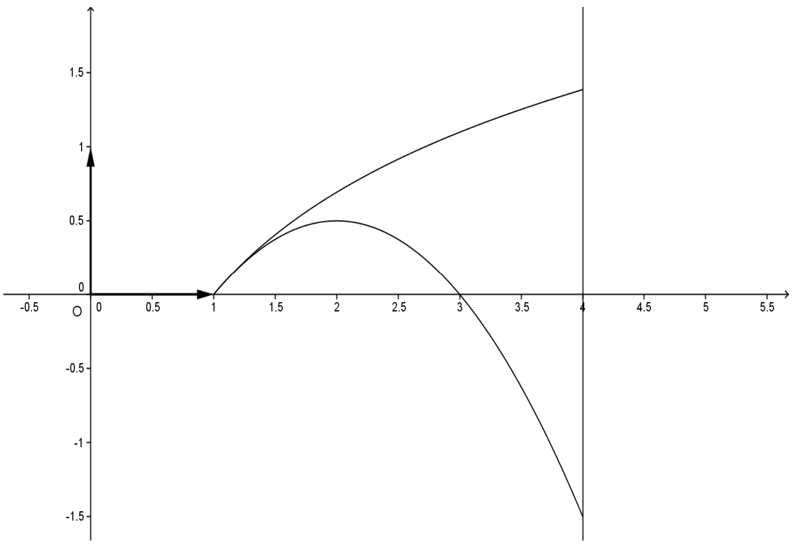
c) Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln(x)$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

a) Démontrer que $\int_1^4 h(x)dx = 0$.

b) Sur le graphique ci-contre, le plan est muni d'un repère orthogonal dans lequel on a tracé la droite (d) d'équation x = 4, et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4].

Illustrer sur ce graphique le résultat de la question précédente.



c) On note ($\mathscr{D}$) le domaine du plan délimité par la droite (d), et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle [1 ; 4].

En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de ($\mathscr{D}$) en unités d'aire.