Devoir à la maison n°7

A rendre le 26.01.2010

ln désigne la fonction “logarithme népérien” ; e est l'unique réel positif tel que $\ln e = 1$.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui associe au réel x, lorsque cela est possible, le réel $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
Dans le plan rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on appelle (C) la courbe représentant f et (Γ) la courbe d'équation $y = \ln x$.

La partie 3 de ce devoir est hors programme : sa recherche est facultative.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Prouver que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Prouver que f est impaire ; qu'en déduit-on pour la courbe (C) ?
   (c) Étudier la limite de f en $+\infty$; en déduire la limite de f en $-\infty$.
   (d) Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
   (e) Dresser le tableau de variations de f.
2. Une propriété de la courbe (C) : on pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = f(x) - \ln x$.
   (a) Étudier le signe du nombre $g(x)$, pour $x > 0$. Qu'en déduit-on pour les courbes (C) et (Γ) ?
   (b) Étudier la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Comment interpréter graphiquement cette limite ?
   (c) Tracer dans un repère orthogonal aux unités convenablement choisies les cours (C) et (Γ).
3. Pour tout x réel, on appelle **fonction sinus hyperbolique** la fonction sinh définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   (a) Prouver que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = y \iff x = \sinh y)$$

   (b) Que peut-on dire des fonctions f et sinh ? Que représentent-elles l'une par rapport à l'autre ?
   (c) Indiquer comment, dans un repère orthonormé, on obtiendrait la courbe de $\sin h$ à partir de celle de f.