Terminale S2

Devoir à la maison n°3

A rendre le 02.12.2009

Vous traiterez ***au choix*** *l'un des deux problèmes suivants : le premier est un thème de recherche.*
Le second est un exercice de type bac.

Exercice 1.

Il s'agit dans ce problème de déterminer toutes les fonctions f, définie sur l'intervalle ouvert $]0;+\infty[$, dérivables en 1 et telles que :

$$\forall x, y \in]0;+\infty[, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Analyse du problème : On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant les hypothèses faites ci-dessus et on pose $f'(1) = a$.

1. Déterminer $f(1)$.
2. Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h}$.
3. Prouver que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer, pour tout $x > 0$, le nombre $f'(x)$ en fonction de a et de x.
4. En terme de primitive, comment définir la fonction f ?
5. Que dire de f si $a = 0$?

Synthèse du problème : Soit a un réel et f l'unique primitive, sur $]0;+\infty[$, de la fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, qui s'annule en 1.

1. Justifier l'existence de f.
2. f verifie-t-elle les contraintes de l'énoncé si $a = 0$?
3. On suppose dans cette question que $a \neq 0$. Prouver que :
   (a) f est dérivable en 1 ;
   (b) Pour toux réels strictement positifs x et y, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
   Indication : on pourra considérer y comme étant fixé, utiliser les fonctions $g : x \mapsto f(xy)$ et $h : x \mapsto f(x) + f(y)$ et montrer que la différence de ces fonctions est constante, égale à 0.

Conclusion : Quel est l'ensemble des fonctions répondant au problème ?

Exercice 2.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$. On a représenté en annexe la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse $1,5$. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie B

1. Déterminer graphiquement le signe de f.
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

ANNEXE

À rendre avec la copie