Tale S 1- 4 - 5 - 6	Correction du DS n°1	du 23 septembre 2013

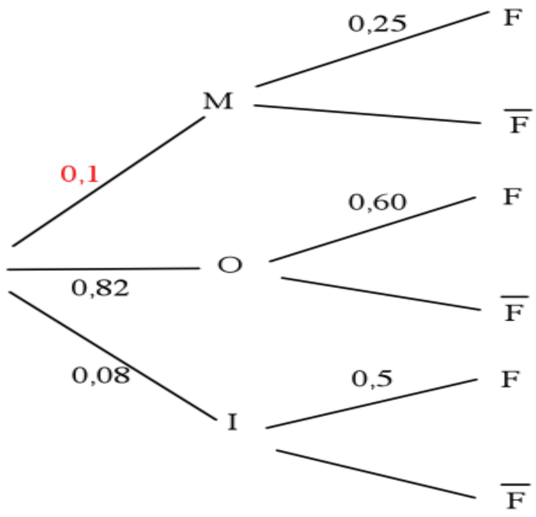
Exercice n°1 — 7pts

Partie A

1. D'après les données, on a :

$P(O)=0{,}82$; $P(I)=0{,}08$;

$P_M(F)=0{,}25$; $P_O(F)=0{,}6$; $P_I(F)=0{,}5$



(0,5 pt)

2. a) $P(M)=1-P(I)-P(0)=1-0{,}08-0{,}82=\boxed{0{,}1}$ *(0,5 pt)*

b) $P(M\cap F)=P(M)\times P_M(F)=0{,}1\times 0{,}25=\boxed{0{,}025}$ *(1 pt)*

c) M, O et I forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F)=P(M\cap F)+P(O\cap F)+P(I\cap F)$$

$$P(F)=0{,}025+P(O)\times P_O(F)+P(I)\times P_I(F)$$

$$P(F)=0{,}025+0{,}82\times 0{,}6+0{,}08\times 0{,}5$$

$$P(F)=0{,}025+0{,}492+0{,}04=\boxed{0{,}557}$$ *(1,5 pt)*

Partie B

1. D'après les données : $P(\overline{B}\cap A)=0{,}002$; $P(B\cap\overline{A})=0{,}003$ et $P(B)=0{,}04$.

A et $\overline{\text{A}}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales:

$\text{P}(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$ donc $0{,}04=P(A\cap B)+0{,}003$ *(1,5 pt)*

donc $P(A\cap B)=0{,}04-0{,}003=\boxed{0{,}037}$

La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

2.

B et $\overline{\text{B}}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales: *(1,5 pt)*

$\text{P}(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=0{,}037+0{,}002=\boxed{0{,}039}$

La probabilité que l'alarme se déclenche est égale à 0,039.

3. $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0{,}037}{0{,}039}=\boxed{\dfrac{37}{39}}$. *(0,5 pt)*

Exercice 2 — 3,5 pts

1. $u_0 = 1$ *(0,5 pt)*
2. Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$. *(0,5 pt)*
3.

On rentre l'algorithme suivant dans la calculatrice :

```
Input N
1 → U
For (I ,1 ,N)
√(3U + 1) → U
End
Disp U
```

On obtient :

N	1	2	3	4	5	6
U	2	2,646	2,9895	3,157	3,236	3,272

La suite (u_n) semble croissante. *(0,5 pt)*

4. Raisonnons par récurrence. Soit P(n) la proposition « $0 < u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ donc $0 < u_0 < u_1$. P(0) est vraie.

Hérédité : Supposons que P(n) est vraie pour un entier $n \geq 0$.

On a : $0 < u_n < u_{n+1}$.

On multiple chaque membre par 3.

$0 < 3u_n < 3u_{n+1}$.

On ajoute 1 à chaque membre.

$1 < 3u_n + 1 < 3u_{n+1} + 1$.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc

$1 < \sqrt{3u_n + 1} < \sqrt{3u_{n+1} + 1}$ donc $0 < u_{n+1} < u_{n+2}$. Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, $0 < u_n < u_{n+1}$.

La suite (u_n) est strictement croissante. *(2 pts)*

Exercice 3 — 9,5 pts

$u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3\,u_n}{1 + 2\,u_n}$

1) **a)** $u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{1{,}5}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$; $u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{9}{10}}$. *(0,5 pt)*

b) $u_1 - u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_2 - u_1 = \frac{3}{20}$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

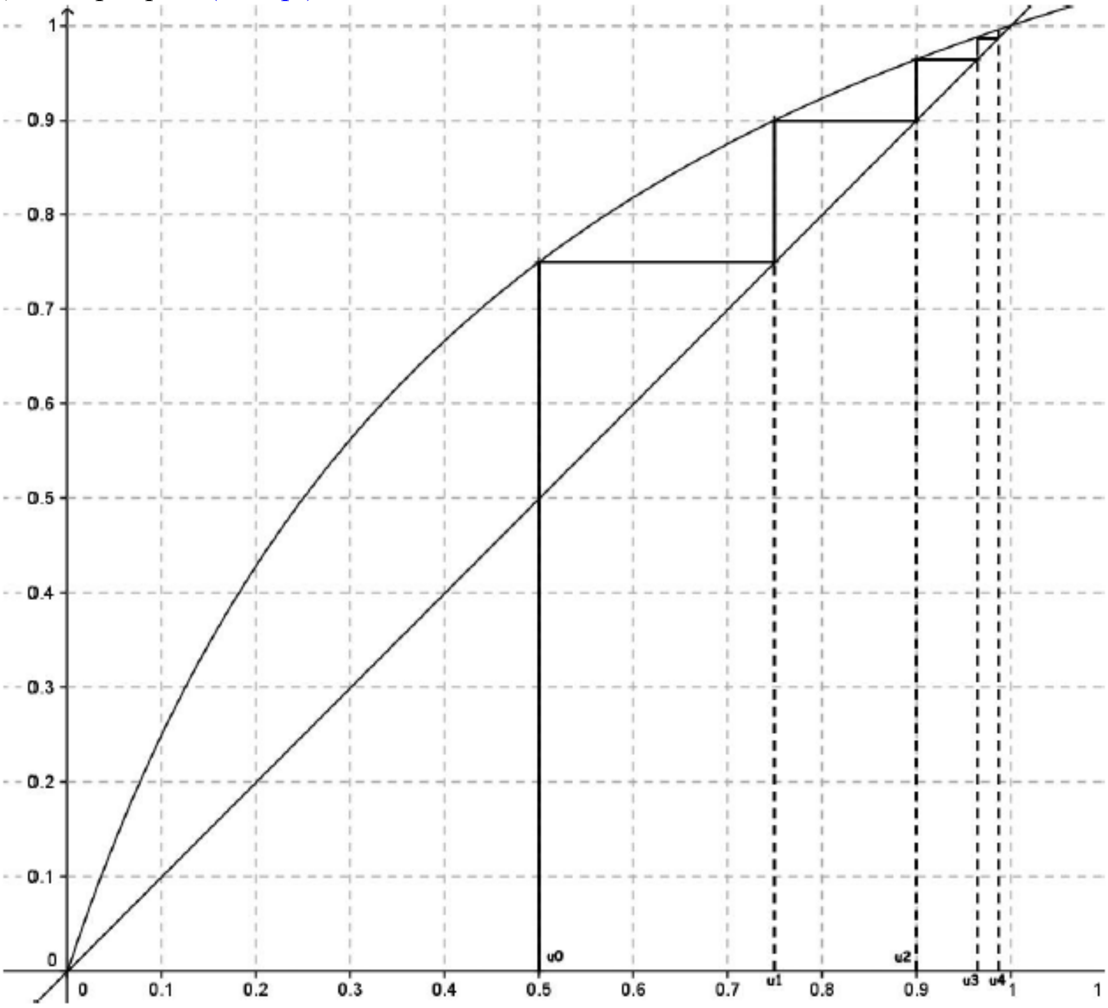
La suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$$u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{1{,}5}{2} = \boxed{\frac{3}{4}} \ ; \ u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{9}{10}}$$ *(1 pt)*

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{6}{5} \text{ donc } \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}.$$

La suite (u_n) n'est pas géométrique.

2) Graphique (0,75 pt)



3.

$$f: \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{3x}{1+2x}$$

La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, elle est donc dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x \\ v(x) = 1+2x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{3}{(1+2x)^2}$$

Pour tout x de $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, on a $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Tableau de variations :

x	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	↗	

(1 pt)

4) Soit P_n la propriété « $0 < u_n < 1$ ». Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pout tout entier naturel n.

- Initialisation : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété P_n est donc vraie au rang 0.
- Hérédité : Supposons la propriété P_n vraie pour un entier n positif ou nul.

$0 < u_n < 1$

La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc :

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

donc $0 < u_{n+1} < 1$

- Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, $0 < u_n < 1$. (2 pts)

5) Soit un entier naturel n.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - \frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{3u_n - u_n - 2u_n{}^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n - 2u_n{}^2}{1+2u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

Or , d'après 4), pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$ donc $\begin{cases} 2u_n > 0 \\ 1 - u_n > 0 \\ 1 + 2u_n > 0 \end{cases}$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante. *(1,5 pt)*

6) a) Pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ or $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ donc

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}\times(1+2u_n)}{[1-\frac{3u_n}{1+2u_n}]\times(1+2u_n)} = \frac{3u_n}{1+2u_n-3u_n} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$ *(1,25 pt)*

Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 3v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q = 3.

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q=3 donc, pour tout entier naturel n, on a :
$v_n = v_0 \times 3^n$.

(0,5 pt)

Or $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$

c) Par définition, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

donc $u_n = v_n(1-u_n)$

$$u_n = v_n - u_n v_n$$

$$u_n + u_n v_n = v_n$$

$$u_n(1+v_n) = v_n$$

(1 pt)

or pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ donc $v_n \neq -1$, d'où

$$u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$$

$$u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$$