Durée 2h - Calculatrice autorisée.

Exercice n°1 **4 pts**

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ?

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».

a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

Exercice n°2 **5 pts**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir. On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on considère l'événement :

- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son *n*-ième passage.»
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son *n*-ième passage.»

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

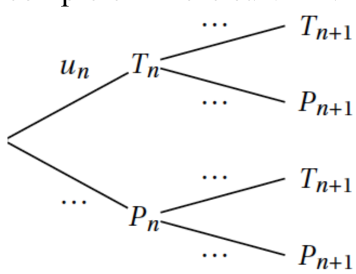
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1. a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(P_2)$.

b) Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



d) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0{,}1 u_n + 0{,}2$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°3 **2,5 pts**

Déterminer la limite de chaque suite (u_n) :

1. $u_n = \frac{1}{n}\sin(2^n)$
2. $u_n = 2\times 17^n + 4\times(-0,5)^n$
3. $u_n = \frac{4n^2+3n-2}{-2n+5}$.

Exercice n°4 **8 pts**

Question de cours

1. Rappeler la définition d'une suite (u_n) qui diverge vers $+\infty$.
2. Soit deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$. Démontrer que si pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $u_n \le v_n$ et si (u_n) a pour limite $+\infty$, alors la suite (v_n) a pour limite $+\infty$.

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels *k* et N.

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N −1
    Affecter à U la valeur 3U −2k +3
FinPour
Sortie
Afficher U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \ge n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. On admet que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 3^n + n - 1$.

Soit *p* un entier naturel non nul.

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \ge n_0, u_n \ge 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

b) Justifier que : $n_0 \le 3p$.

c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur *p* = 3.

d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de *p* donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \ge n_0$, on ait $u_n \ge 10^p$.