

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le
texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète
ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

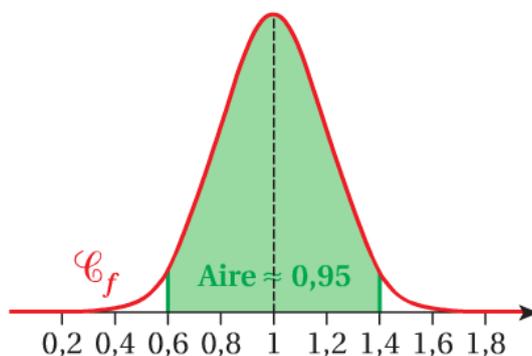
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{2}{x}$

La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1; e]$ est :

- a) 2 b) $\frac{1}{e-1}$ c) $\frac{2}{e-1}$ d) $\frac{-2}{e-1}$

2) On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction de densité f associée à la variable X .



- a) L'espérance de X est 0,4.
b) L'espérance de X est 0,95.
c) L'écart-type de X est environ 0,4.
d) L'écart-type de X est environ 0,2.

3) À l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché **affirme** que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est-à-dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.

Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.

On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

- a) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0,051; 0,249]$, les bornes étant arrondies au millième.
b) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0,100; 0,200]$, les bornes étant arrondies au millième.
c) La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\frac{50}{500}$.
d) Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : L'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2 .

En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1) Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012. Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? Justifier la réponse.

2) Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.

Partie B : Étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2 .

En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005 + n$.

1) Déterminer u_0 et u_1 .

2) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.

3) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 10$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 31 \times (0,98)^n + 10$.

4) a) Calculer la limite de la suite (u_n) .

b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5) À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO₂, par rapport à l'année 2005.

a) Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme

1 Variables
2 U est du type nombre
3 n est du type nombre entier
4 Début Algorithme
5 U prend la valeur 41
6 n prend la valeur 0
7 Tant que (.....) faire
8 Début Tant que
9 U prend la valeur.....
10 n prend la valeur n + 1
11 Fin Tant que
12 Afficher n
13 Fin Algorithme

b) L'algorithme affiche 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.

En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.

On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.

On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- A est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » ;
- B est l'événement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».

1) Dessiner ce graphe probabiliste.

On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année 2015 + n ;
- b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année 2015 + n .

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année 2015 + n .

2) Donner a_0 et b_0 .

3) Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

4) Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note $P = (x \quad y)$ l'état stable de la répartition des abonnés.

a) Montrer que les nombres x et y sont solutions du système $\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

b) Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.

c) Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

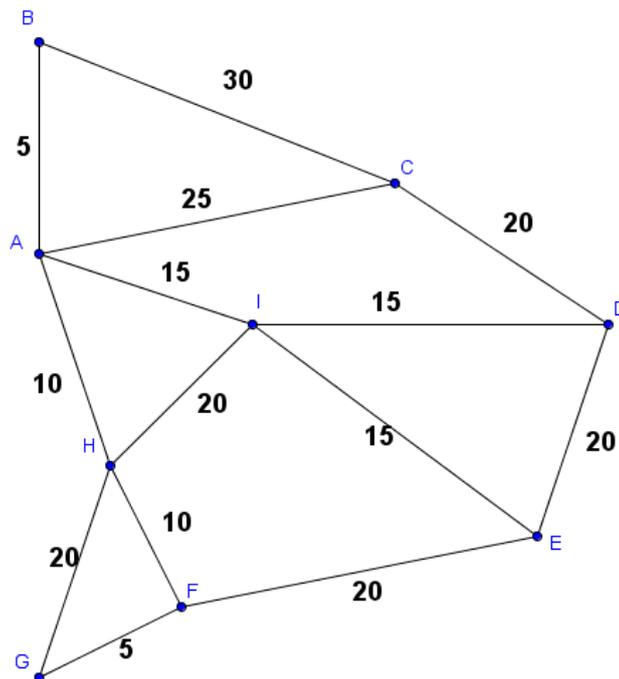
Partie B

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique.

Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées. L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement.

Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski ;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer ;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



1) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.

2) Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont liées.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(x) = \frac{1}{0,5+100e^{-x}}$.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

1) Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0 ; 10]$, on a $f'(x) = \frac{100e^{-x}}{(0,5+100e^{-x})^2}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{100e^{-x} \times (100e^{-x} - 0,5)}{(0,5+100e^{-x})^3}.$$

2) a) Montrer que, dans l'intervalle $[0 ; 10]$, l'inéquation $100e^{-x} - 0,5 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $x \leq -\ln(0,005)$.

b) En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

3) On appelle C_f la courbe représentative de f tracée dans un repère.

Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe C_f admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4) En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Partie B

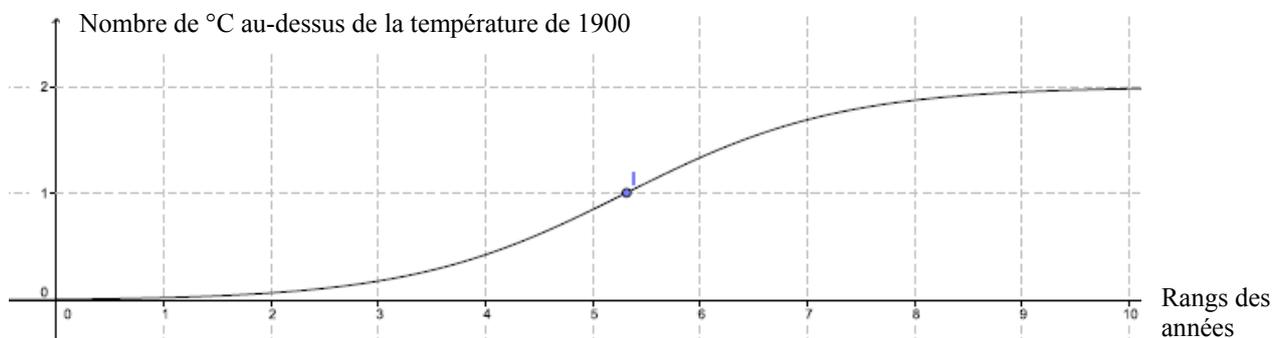
Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C.

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays.

Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900.

Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie A, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.

La courbe représentative C_f de la fonction f est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion.
 Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1.
 Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



- 1) a) Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.
 b) En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.
- 2) a) En utilisant la partie A, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe C_f . Arrondir le résultat à l'unité.
 b) Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.
- 3) On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f' .
 a) Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera ? Justifier la réponse.
 b) Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera ? Justifier la réponse.
- 4) Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5 °C la température de l'année 1900.
 Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.