Les homothéties.

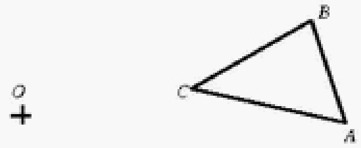
I) Généralités

Définition : On appelle homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) la transformation pour laquelle un point M du plan a pour image le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$

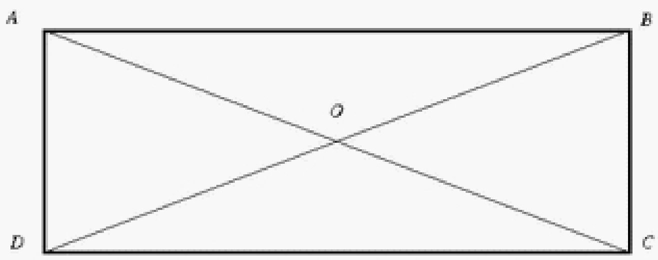
Exemples : dans chacun des cas ci-dessous, construire l'image de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport k. Préciser également s'il s'agit d'un agrandissement ou d'une réduction.

$k = 2$

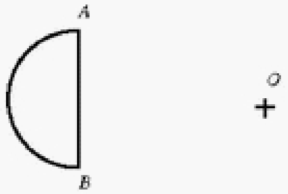
Dans chaque cas, on écrira des relations de colinéarité du type : $\overrightarrow{OA'} = 2\,\overrightarrow{OA}$



$k = \dfrac{1}{2}$



$k = -2$



Théorème 1 : dans une homothétie, un point, son image et le centre sont toujours alignés.

Démonstration : par définition, la relation $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires, donc les points O, M et M' sont alignés.

Théorème 2 : Si une homothétie de rapport k transforme M en M' et N en N', alors on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.

Démonstration : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k\,\overrightarrow{MO} + k\,\overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\,\overrightarrow{MN}$

Conséquences : * une homothétie transforme une droite en une droite parallèle .

* une homothétie multiplie les distances par | k |

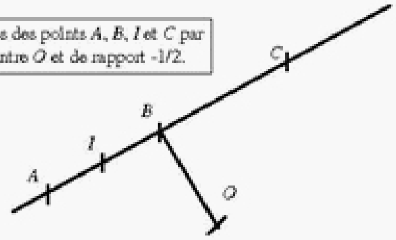
Exercice : démontrer qu'une homothétie h transforme un triangle en un triangle semblable :

II) Propriétés des homothéties

1) Conservation :

- l'homothétie **ne conserve pas les distances**
- l'homothétie conserve :
  - l'alignement.
  - les angles (et en particulier l'angle droit).
  - le milieu d'un segment.
  - les relations de colinéarité.

Construire les images des points A, B, I et C par l'homothétie de centre O et de rapport -1/2.



2) Action sur les figures :

Une homothétie h de rapport k ($k \neq 0$) transforme :

- une droite d en une droite d' **parallèle** à d.
- un segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ parallèle tel que $M'N' = |k| MN$.
- un cercle C de rayon R en un cercle C' de rayon $|k| R$.
- un triangle (isocèle, rectangle, équilatéral) en un triangle de même nature.
- un quadrilatère (parallélogramme, losange, rectangle, carré) en un quadrilatère de même nature.

III) Cas particuliers

Certaines homothéties sont des transformations déjà connues, c'est ce qui se passe pour certaines valeurs du rapport k.

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Soit M un point du plan et M' son image par l'homothétie h ($M' = h(M)$).

$k = 1$: On a, par définition : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$ donc $M' = M$. Donc h est l'identité.

$k = -1$: On a, dans ce cas : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM}$, ce qui signifie que O est le milieu du segment $[MM']$ donc h est la symétrie centrale de centre O.

$|k| > 1$: dans ce cas, l'homothétie réalise un agrandissement .

$|k| < 1$: dans ce cas, l'homothétie réalise une réduction .