cours de mathématiques en troisième

.

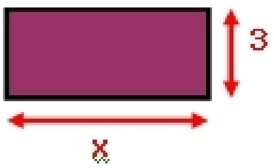
Les fonctions affines.

Dans cette leçon, nous considérerons comme acquis le chapître sur les fonctions linéaires .
On se placera dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I.Les fonctions affines :

1.Activité d'introduction :

Considérons un rectangle de longueur x cm et de largeur 3 cm.



Notons y son périmètre.
Nous allons étudier les variations du périmètre en fonction de celles de la longueur.

a. Compléter le tableau de valeur suivant :

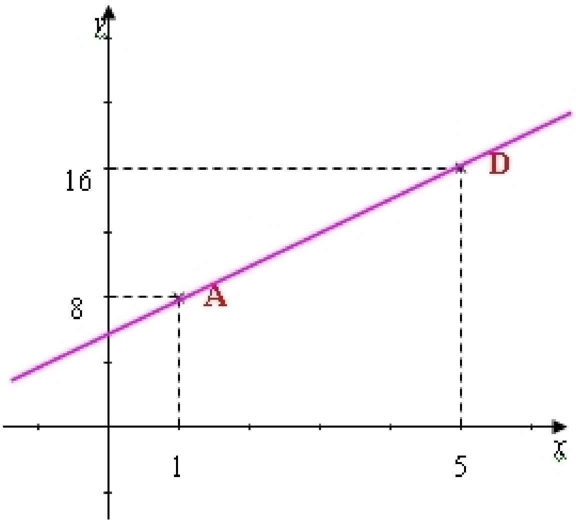
Longueur (en cm)	1	2	4	5
Périmètre (en cm)	8	10	14	16

b. Ce tableau représente-t-il une situation de proportionnalité ?

c. Le périmètre est-il une fonction linéaire de la longueur du rectangle ?

d. Donner une relation (égalité) reliant y et x.
On dit que le périmètre (y) est une « fonction affine » de la longueur (x).
Nous avons y =2x+ 6 d'après la formule du périmètre d'un rectangle

e. Dans le repère (O, , placer les points A(1,8) B(2 ;10) C(4 ;14) D(5 ;16).



f. Quelles sont vos remarques ?
Tous les points sont alignés sur une droite.

2. Définition :

Définition :

Soient a et b deux réels (IR) fixés.
La fonction affine f de coefficients a et b est définie par la relation :
A tout nombre x on associe le nombre ax+b.
On note f : x $\longrightarrow$ ax+b (ou f définie par f(x)=ax+b)
Le nombre f(x) est appelé image de x par la fonction f.

Exemples :

Dans l'activité précédente la périmètre est une fonction affine f de la longueur.
En notant x la longueur. O
n a f(x)= 2x+6 avec a=2 et b=6.
Si a = 3 et b = -5 alors la fonction affine est : f : x $\longmapsto$ 3x-5
Calculer l'image des nombres 2 et -3 par f.
f(2)=3x2-5 =6-5=1donc l'image de 2 par f est 1.
f(-3)=3x(-3)-5=-9-5=-14 Remarque :

Une fonction linéaire est une fonction affine puisqu'elle s'écrit f : x $\longrightarrow$ ax+0 avec b=0
La réciproque est fausse.
ne fonction affine n'est pas toujours linéaire.
Contre-exemple : h : x $\longrightarrow$ 3x+2 est affine mais pas linéaire.

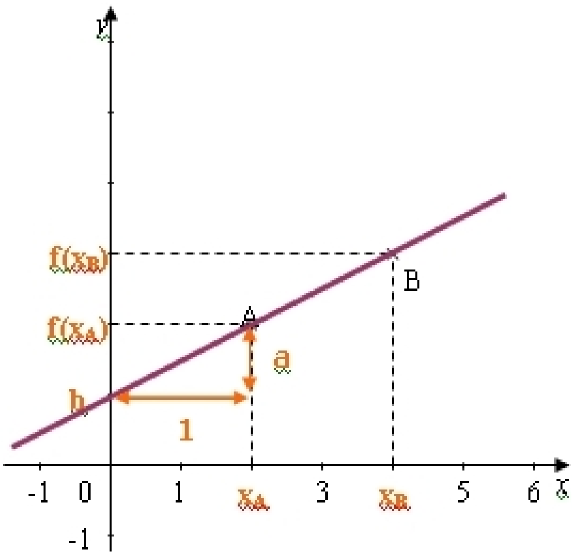
3. Courbe représentative d'une fonction affine :

Dans l‘activité d‘introduction, nous avons remarqué que la courbe est une droite,
Cette propriété est généralisée pour toutes les fonctions affines. Propriété :

La représentation graphique d‘une fonction affine f : $x \longrightarrow ax+b$ est une droite.
Cette droite a pour équation réduite y=ax+b.
a est appelé « le coefficient directeur »
et b « l‘ordonnée à l‘origine ».

Remarque :

b s‘appelle l‘ordonnée à l‘origine car f(0)=ax0+b=b donc la droite passe par le point de coordonnées (0,b) donc par l‘ordonnée à l‘origine.



Exemple :

Représenter graphiquement f : $x \longmapsto 3x+2$.

Méthode :

le principe est le même que pour les fonctions linéaires.
Sauf que dans ce cas il nous faut deux points.
Prenons deux valeurs de x différentes et calculons leur image.

Valeur de x	0	2
Valeur de f(x)	2	8
Points de la droite	A(0;2)	B(2;8)

II.Détermination de l‘expression d‘une fonction affine par le calcul :

Méthode :

Le procédé est similaire à celui des fonctions affines sauf que dans ce cas nous avons deux coefficients (a et b) déterminer donc il nous faut deux informations donc les coordonnées de deux points.

Exemple :

Déterminer l‘expression de la fonction f dont la courbe passe par les points A(2,5)
et B (-1 ;-1)

y= ax+b
A appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l‘équation 5=2a+b.
B appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l‘équation -1=-1a+b.
Nous sommes donc amenés à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2a+b=5 \\ -a+b=-1 \end{cases}$$

Après résolution, nous obtenons a =2 et b=1.

Conclusion :
la fonction f recherchée est : f : x $\mapsto$ 2x+1 Remarque :

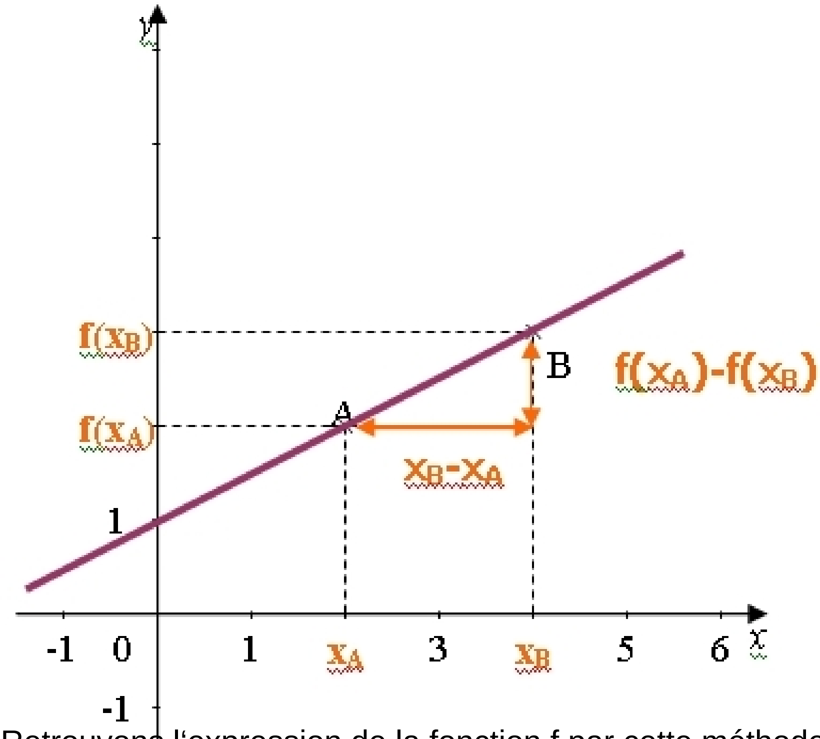
b s‘appelle l‘ordonnée à l‘origine car f(0)=ax0+b=b donc la droite passe par le point de coordonnées (0,b) donc par l‘ordonnée à l‘origine.

Si le chapître sur les systèmes n‘a pas été étudié,

a est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de
f(x) et ceux de x donc pour tout nombres ξ_A et ξ_B distincts

Donc $a=\frac{f(\xi_A)-f(\xi_B)}{\xi_A-\xi_B}$

et b s‘obtient en résolvant $f(\xi A)=a\xi_A+b$ ou $f(\xi_B)=a\xi_B+b$.



Retrouvons l'expression de la fonction f par cette méthode :

$$a = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{5-(-1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

ensuite
$f(x_A)=ax_A+b$
5=2a+b
5=2x2+b
b=5-4=1
ou
$f(x_B)=ax_B+b$
-1=2x(-1)+b
-1=-2+b
b=-1+2=1

Conclusion :
nous retrouvons bien a=2 et b=1 donc f: $x \mapsto 2x+1$.