cours de mathématiques en troisième

.

Le calcul littéral et les identités remarquables.

I. Développer et réduire une expression.

0. Préambule: règle des signes.

Afin de pouvoir être à l'aise avec le calcul littéral (ou algébrique), il faut impérativement maîtriser la règle des signes.

Multiplié par	+	-
+	+	-
-	-	+

Définition :

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme de termes la plus simple possible.
(on développe les produits, on supprime les parenthèses et on regroupe les termes de même nature)

1. Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction : (rappels de 5ème et 4ème)
Propriétés :

Soient a, b, c, d et k des nombres (réels IR) quelconques.

- $k\times(a+b)=k\times a+k\times b$ (simple distributivité)

- $k\times(a-b)=k\times a-k\times b$ (simple distributivité)

- $(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$(double distributivité).

Exemples :

[illegible]

$E=4(x+7)-(2x+4)(3x-1)$

$E=4x+4\times7-[2x\times3x-2x\times1+4\times3x-4\times1]$

Lorsque le développement est précédé d'un signe moins,
on ouvre une parenthèse et on effectue le développement à l'intérieur.

$E=4x+28-[6x^2-2x+12x-4]$
$E=4x+28-6x^2+2x-12x+4$
$E=-6x^2-6x+32$

2. Les identités remarquables.
Propriétés :

Soient a et b sont deux nombres (réels IR) quelconques.

A. Carré d'une somme

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. Carré d'une différence

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C. Produit d'une somme de deux nombres par leur différence

$(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$

Preuves :

Utilisons la propriété de double distributivité rappelée au début de la leçon.

A.
$(a+b)^2$
$= (a+b)(a+b)$
$= a\text{x}a+a\text{x}b+b\text{x}a+b\text{x}b$
$= a^2+ab+ba+b^2$ (or ab = ba car la multiplication est commutative en effet 2x3=3x2)
donc
$(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$

cqfd

B.
$(a-b)^2$
$= (a-b)(a-b)$
$= a\text{x}a-a\text{x}b-b\text{x}a+b\text{x}b$
$= a^2-ab-ba+b^2$ (ne pas oublier la règle des signes.)

donc $(a-b)^2= a^2-2ab+b^2$

cqfd

C.
(a-b)(a+b)
= axa+axb-bxa-bxb
= a²+ab-ab-b²
= a²-b² cqfd

Exemples :

$A=(x+9)^2$

[illegible]

Lorsque le développement est précédé d'un signe moins,on ouvre une parenthèse et on effectue le développement à l'intérieur.

$G=2x-(x^2-8x+16)$

On supprime ensuite les parenthèses.

$G=2x-x^2+8x-16$
$G=-x^2+10x-16$

II. Factoriser une somme de termes
Définition :

Factoriser une somme de termes, c'est la transformer en un produit de facteurs.

Méthode 1 :

On recherche un facteur commun aux différents termes de la somme.

$A=4x+12$ (4 est un facteur commun à 4x et à 12)
$A=4\times x+4\times 3$

On fait apparaître le facteur commun et on l'entoure en rouge dans chaque terme.

$A=4(x+3)$
On applique la règle de la distributivité (dans le sens de la factorisation)

$B=5a^2-25a$
$B=5a\times a-5a\times 5$

$B = 5a(a-5)$

$C = (2x+1)(7x-3)+(2x+1)(x+2)$
$C = (2x+1)[(7x-3)+(x+2)]$
$C = (2x+1)(7x-3+x+2)$
$C = (2x+1)(8x-1)$

$D = (5x-1)(3x-7)-(5x-1)(5x-3)$
$D = (5x-1)[(3x-7)-(5x-3)]$
$D = (5x-1)(3x-7-5x+3)$
$D = (5x-1)(-2x-4)$

Méthode 2 :

on reconnaît une identité remarquable.

$E = x^2+10x+25$
Cette expression ressemble à a² + 2ab + b² qui vaut (a + b)² .
a vaudrait x et b vaudrait 5.
vérifions si $10x$ est le double produit 2ab.
$E = x^2+2\times x\times 5+5^2$

$10x$ est bien le double produit donc :

$E = (x+5)^2$

$F = 9x^2-24x+16$

Cette expression ressemble à a² - 2ab + b² qui vaut (a - b)²

$F = (3x)^2-2\times 3x\times 4+4^2$
a vaut $3x$ et b vaudrait 4 donc :
$F = (3x-4)^2$

$G = 9x^2-16$
Cette expression ressemble à a² - b² qui vaut (a + b) (a - b)
$G = (3x)^2-4^2$
a vaut $3x$ et b vaut 4 donc :
$G = (3x-4)(3x+4)$

III. Résolution d'une équation produit du type (ax + b) (cx +d) = 0 (avec a et c non nuls).

1. Produit nul:

Théorème :

Si A = 0 ou B = 0 alors A x B = 0 .

Si A x B = 0 alors A = 0 ou B = 0 (c'est la réciproque) .

Autrement dit :

Dire qu'un produit de facteurs est nul revient à dire que l'un au moins de ses facteurs est nul.

2. Exemple :

Résoudre l'équation (4x + 8) (9x - 63) = 0
Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'égalité donnée.
Ici on veut qu'un produit de deux facteurs soit égal à zéro.
Dire qu'un produit de facteurs est nul revient à dire que l'un au moins de ses facteurs est nul .
On a donc
4x + 8 = 0 ou 9x - 63 = 0
4x = -8 ou 9x = 63
x = - 2 ou x = 7

Conclusion :

Les solutions de cette équation sont - 2 et 7.
Ainsi

S ={ - 2 ; 7 }