cours de mathématiques en troisième

.

La trigonométrie dans le triangle rectangle.

0. Introduction :un peu d'histoire

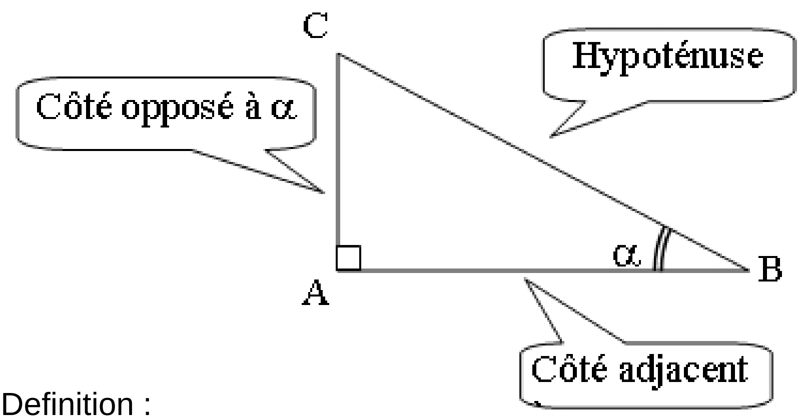
Le mot vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure).
Dans l'Encyclopédie (1751), Jean le Rond d'Alembert (1717 ; 1783) définit la trigonométrie comme :

« **l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît** ».

C'est bien la démarche qui est demandée aux élèves du collège.

I. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

Theoreme : Dans un triangle rectangle ABC, on peut définir les relations suivantes entre les angles aigus et les différentes longueurs des côtés.



Definition :

- Le cosinus d'un angle aigu est donné par:

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\textit{longueur du cote adjacent a l'angle } \widehat{ABC}}{\textit{longueur de l'hypotenuse}}.$$

- Le sinus d'un angle aigu est donné par :

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du cote oppose a l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypotenuse}}.$$

- La tangente d'un angle aigu est donnée par :

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du cote oppose a l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur du cote adjacent a l'angle } \widehat{ABC}}.$$

Moyen mnémotechnique :

SOH-CAH-TOA

Expliquations:

CAH: Cos($\widehat{ABC}$)= (longueur du cote Adjacent a l'angle $\widehat{ABC}$) : (longueur de l'Hypotenuse)

SOH: Sin($\widehat{ABC}$)= (longueur du cote Opposé a l'angle $\widehat{ABC}$) : (longueur de l'Hypotenuse)

TOA: Tan($\widehat{ABC}$)= (longueur du cote Opposé a l'angle $\widehat{ABC}$): (longueur du cote Adjacent a l'angle $\widehat{ABC}$)

Remarques :

- Le sinus et le cosinus d'un angle sont toujours compris entre - 1 et 1.
- Par contre, la tangente d'un angle aigu peut prendre toutes les valeurs.

Exemples :

Si AC=16 cm et BC=20 cm, calculer sin (ABC)
[Réponse :   sin(ABC)=0,8]
Si AC=16 cm et AB= 12 cm, calculer tan(ABC)
[Réponse :   tan(ABC) =1,33]

II. Détermination de la mesure d'un angle en degré, connaissant son cox ou sinx ou tanx :

Methode:

La détermination de la mesure d'un angle connaissant son cosx, sinx ou tanx s'effectue à l'aide de la calculatrice en utilisant les touches :

$\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{tan^{-1}}$.

En ayant verifie, prealablement, que la calculatrice est en mode **degre** $\boxed{DEG}$.

Exemples :

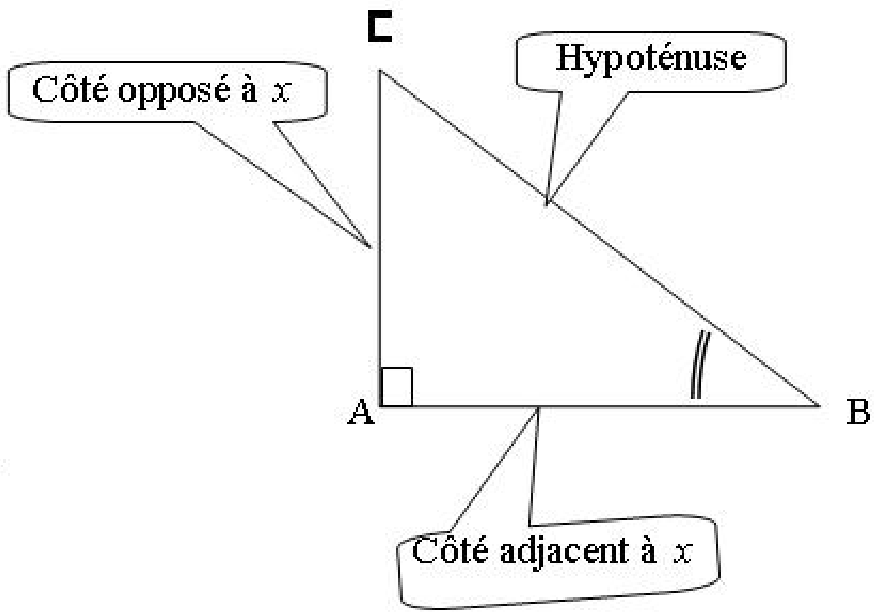
- Si cos x = 0,5 alors $x = \cos^{-1}(0{,}5) = 60^o$.
- Si sin x = 0,5 alors $x = \sin^{-1}(0{,}5) = 30^o$.
- Si tan x = 1 alors $x = tan^{-1}(1) = 45^o$.

III. Formules Trigonométriques :

Proprietes :

Pour tout angle x, les égalités suivantes sont toujours vraies :

- $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$
- $\boxed{tan\, x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ $(x \neq 90^o)$



Preuve :

$\cos x = \frac{AB}{BC}$; $\sin x = \frac{AC}{BC}$; $tan x = \frac{AC}{AB}$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = (\frac{AB}{BC})^2 + (\frac{AC}{BC})^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$.

Or ABC est rectangle en A, donc d'après la partie directe du théorème de Pythagore : $AB^2+AC^2=BC^2$

D'où :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{AB^2+AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

Puis

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = tan x.$$