cours de mathématiques en première

.

Equations et inéquations du second degré.

Dans tout ce chapître, nous considererons a un reel non nul.

I. Résolution de l'équation du second degré :

1. Definition et vocabulaire :

Une équation du second degre, à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a,b,c sont trois réels donnés avec $a \neq 0$
Résoudre l'équation $ax^2+bx+c = 0$, c'est trouver tous les nombres p tels que $ap^2+bp+c=0$.
Un tel nombre p est dit solution ou encore racine de l'équation.

2. Résolution de l'éuation du second degré :

Posons $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.

2.1. Ecriture de f(x) sous forme canonique :

Puisque $a \neq 0$,

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \quad \text{ou} \quad x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$$

donc

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Cette derniere ecriture est appelée forme canonique de f.

2.2. Resolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$:

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$
Ainsi

$$f(x)= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

1er cas :

Si $\Delta < 0$ alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$
Le nombre entre crochets est strictement positif donc l'équation f(x)=0 n'a pas de solution.

2ème cas :

Si Δ =0 alors

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 .$$

.
Puisque a$\neq$ 0, l'equation f(x)=0 a une solution et une seule :

$$x= -\frac{b}{2a}$$

3eme cas :

Si Δ >0 alors $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ et :

$$f(x)= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Si l'on pose :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
Donc puisqua a$\neq$ 0, l'equation f(x)=0 a deux solutions distinctes x_1 et x_2 .

Definition 1 :

Le nombre b^2-4ac est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ou du trinôme ax^2+bx+c.
On le note Δ (lire « delta »).

Théoreme 1 :

a. Lorsque $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

b. Lorsque $\Delta=0$, l'équation a une racine double : $x_1 = \frac{-b}{2a}$

c. Lorsque $\Delta>0$, l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

II. Factorisation et signe du trinôme :

1. Factorisation du trinôme :

Nous avons vu, au cours de la demonstration du theoreme 1 que si
$\Delta>0$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Theoreme 2 : factorisation du trinome.

Lorsque l'équation $f(x)=ax^2+bx+c=0$ a deux solutions x_1 et x_2 (dans le cas $\Delta>0$)
alors,
pour tout réel x,
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

2. signe du trinôme :

Theoreme 3 :

Lorsque $\Delta<0$, f(x) est toujours du signe de a.
Lorsque $\Delta=0$, f(x) est du signe de a
Lorsque $\Delta>0$, f(x) est du signe de a, sauf lorsque x est entre les racines, auquel cas f(x) et a sont de signes contraires.

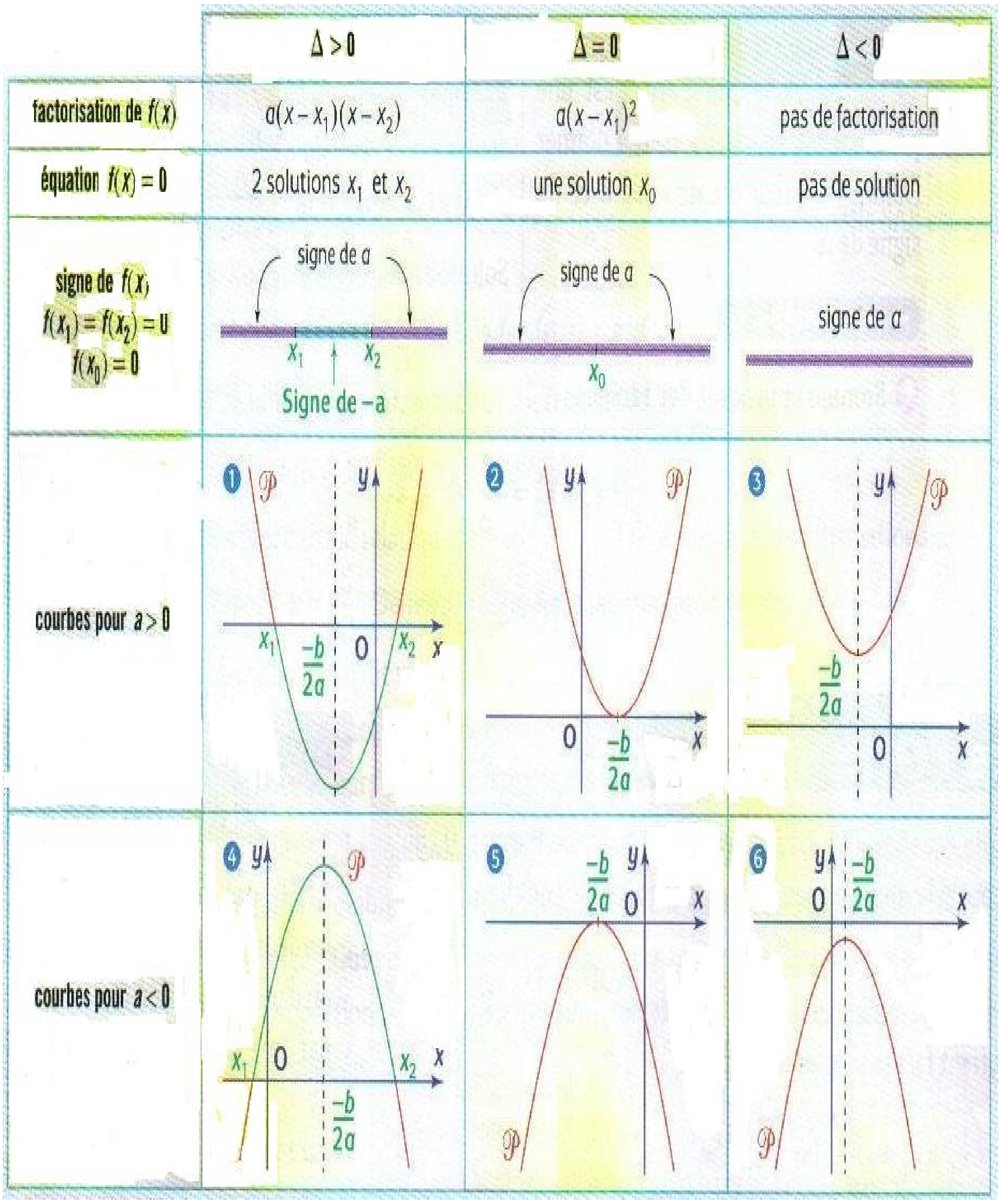
Application :

pour résoudre une inéquation du second degré, on determine le signe du trinôme associé.

III. Représentations graphiques des fonctions trinomes :

La courbe de la fonction $f : x \rightarrow ax^2+bx+c$ est une parabole.
Cette parabole est tournée vers le haut lorsque $a>0$ et tournée vers le bas lorsque $a<0$.

Synthèse :



	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
factorisation de $f(x)$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_1)^2$	pas de factorisation
équation $f(x)=0$	2 solutions x_1 et x_2	une solution x_0	pas de solution
signe de $f(x)$; $f(x_1)=f(x_2)=0$; $f(x_0)=0$	signe de a ; x_1 ; x_2 ; Signe de $-a$	signe de a ; x_0	signe de a
courbes pour $a>0$	1	2	3
courbes pour $a<0$	4	5	6

Exemples :

Résoudre $x^2+3x+3>0$

Solution :

Δ = - 3 puisque Δ<0, le trinome n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.
De plus a=1 donc a>0 ainsi $x^2+3x+3>0$ pour tout x réel et S=$\mathbb{R}$.

Résoudre $-x^2+3x-2 \geq 0$ Δ =1, l'équation $-x^2+3x-2=0$ a deux racines x_1 = 1 et x_2 = 2 .
a=-1 donc a<0 ainsi l'ensemble solution est l'intervalle [1 ;2].