TD Réduction des endomorphismes

PC*2

27 novembre 2003

1. (Mines 2002) Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre 3 telles que $A^3 = B^3 = 0$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même rang.
2. (CCP 98) La matrice :
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Est-elle diagonalisable ?
3. (CCP 2000) La matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ?
4. À quelle condition :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & * & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$?
5. (Centrale 2002 avec Maple) On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) A est-elle diagonalisable ?
   (b) Montrer que A est semblable à :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   (c) Déterminer un polynôme annulateur de A.
   (d) Montrer que (I_3, A, A^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
   (e) Trouver tous les polynômes annulateurs de A.
   (f) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ vérifiant les deux conditions :
   i) $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$,
   ii) la famille (I_3, M, M^2) est libre.
   Montrer que M est semblable à A.
6. (CCP 99 et Cen 2000) Valeurs propres, sous espaces propres des endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définis par :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
7. (CCP 2003) Étudier le caractère diagonalisable et déterminer les puissances de la matrice (a_{ij}), avec :
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
8. (CCP 2003) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $a_{ij} = \frac{1}{j}$.
   (a) Calculer A^2, A est-elle inversible ?
   (b) Rang de A ?
   (c) Valeurs propres et sous-espaces propres de A ? A est-elle diagonalisable ?
   (d) Soit $B = \frac{1}{n}A$. Caractériser l'endomorphisme canoniquement associé à B.

9. (X 99) Déterminant, valeurs propres et vecteurs propres de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. (CCP 99) Inverse, Valeurs propres, sous espaces propres de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

11. (Mines 2001) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & e & f & g \\ 0 & 1 & h & i \\ 0 & 0 & 1 & j \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{K}$ si et seulement si elle possède quatre valeurs propres distinctes dans $\mathbf{K}$.

12. (CCP 99) La matrice complexe :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

13. (CCP 2000) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels distincts et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$, telle que $a_{i,j} = 0$ si $i < j$ et $a_{2k-1,2k-1} = a_{2k,2k} = \lambda_k$ pour $k = 1, 2, \dots, n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour qu'elle soit diagonalisable.

14. (CCP 99) La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{u}{v} & \frac{v}{w} \\ \frac{v}{u} & -\frac{1}{2} & \frac{u}{w} \\ \frac{w}{v} & \frac{w}{u} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

où u, v, w sont des réels non nuls est-elle diagonalisable ?

15. (Mines 98) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes. La matrice $(a_i \delta_{i,n+1-j})$ est-elle diagonalisable ?

16. (CCP 99) Résoudre le système suivant d'inconnues $(X, Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})^2$:

$$XY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad YX = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. (CCP 99) L'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$P \mapsto P(X-1)$$

est-il diagonalisable ?

18. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ telle que :

$$\forall m \geq 1,\ A^m = (-1)^m E + 2^m F + G$$

où $E, F, G \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$. A est-t-elle diagonalisable ?

19. (Mines 2001, Centrale 2002, 2003) Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ vérifiant :

$$M^k = \lambda^k A + \mu^k B \text{ pour } k = 1, 2, 3$$

M est-t-elle diagonalisable ?

20. Trouver $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

21. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ telle que :

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22. (1996) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, diagonalisable, de valeurs propres distinctes. Quel est le nombre de matrices X telles que $X^2 = A$?
23. (X99) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Résoudre l'équation $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.
24. Soit
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$
Déterminer (a_n, b_n, c_n) tels que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n \mathrm{I}_3$$
25. (CCP 99) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^5 = A + \mathrm{I}_n$. Montrer que $\det A > 0$.
26. (CCP 98) Soit $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
Montrer que les matrices réelles qui commutent à A sont de la forme $P(A)$ avec $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré ≤ 2.
27. (CCP 99 et Centrale 2001) Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
$$f^2 = f^3 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{I}_E) = 1$$
Montrer l'existence d'une base de E où la matrice de f est de la forme :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
avec $\alpha = 0$ ou 1.
28. (Mines 2003) Trouver les $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A^3 = B$ avec :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

27 novembre 2003

29. (Cen 99) Tout l'exercice avec Maple.
Trouver les éléments propres de :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Comment le ferait-on à la main ? Trouver les $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $X^2 = A$.
Trouver les $Q \in \mathbf{R}[X]$ tels que $Q(A)^2 = A$.
30. (CCP 98) Trouver les matrices M réelles telles que $M^2 = A = (1 - \delta_{i,j})$.
31. $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, $A = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer A^2 et A^4. A est-t-elle diagonalisable ?
32. (Mines) $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer $\det(A)$.
   (b) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1$$
   (c) A est-t-elle diagonalisable ?
33. (Mines) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :
$$\begin{cases} a_{i,j} = a & \text{si } i < j \\ a_{i,i} = 0 & \\ a_{i,j} = b & \text{si } i > j \end{cases}$$
Montrer que les images des valeurs propres de A dans le plan complexe sont cocycliques. A est-t-elle diagonalisable ?

34. (Mines 99,2002, CCP 2001) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$
l'est aussi.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. A quelle condition la matrice
$$\begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ? Généraliser. (cf feuille d'exercices généraux d'algèbre linéaire)

35. (CCP 98) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par :
$$M \mapsto (\mathrm{Tr}\, A)\, M - (\mathrm{Tr}\, M)\, A$$
f est-elle diagonalisable, si oui, trouver ses vecteurs propres.

36. (Mines 99) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 = A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{rg}\, A$ est pair.

37. (Cen 2003) Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que les seuls sous-espaces stables par f soient $\{0\}$ et E. Que dire de la dimension de E ? Même question si le corps est $\mathbf{R}$.

38. (Cen 98)
    (a) Si $P \in \mathbf{C}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, diagonalisable, montrer que $P(A)$ aussi.
    (b)
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
    Calculer J^m, $m \in \mathbf{N}^*$ et déterminer les éléments propres de J.

27 novembre 2003

    (c) $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des complexes.
$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$
    Exprimer M à l'aide des J^m et diagonaliser M.

39. (Cen 99) Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f, g deux endomorphismes de E tels que :
$$f \circ g - g \circ f = \alpha f \quad \alpha \neq 0$$
    (a) Montrer que $f^k \circ g - g \circ f^k = k\alpha f^k$.
    (b) Soit (λ, v) un couple propre de g. Montrer qu'existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^k(v) = 0$.
    (c) On suppose que g est diagonalisable, montrer que f est nilpotent.

40. (Cen 2000) Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n, u, v deux endomorphismes de E tels que :
$$u \circ v - v \circ u = \alpha\, u + \beta\, v$$
    (a) Montrer que u et v ont un vecteur propre commun en commençant par le cas $\alpha = \beta = 0$.
    (b) Calculer $u^k \circ v - v \circ u^k$.

41. (Mines 2002 et 2003) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f$ soit de rang 1. Prouver que, si $x \in \mathrm{Im}(f \circ g - g \circ f)$, alors $\forall n \geq 1,\ f^n(x) \in \mathrm{Ker}(f \circ g - g \circ f)$. En déduire que χ_f se décompose en un produit d'au moins deux facteurs.

42. (Mines 2003) Soit $A = (a_i)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, avec $a_i \neq 0$. Déterminer la dimension de la plus petite sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui contient A.

43. (CCP 98) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_{2n}[X]$ défini par :
$$P \mapsto (X^2 - 1)\, P' - 2nX\, P$$
Vérifier que c'est bien un endomorphisme. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
f est-il diagonalisable ?

44. (CCP 99) Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$P \mapsto (X-a)\,P' + P$$

Noyau ? Valeurs et vecteurs propres de ϕ ? Est-il diagonalisable ?

45. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$P \mapsto (nX+1)\,P + (1-X^2)\,P'$$

f est-il diagonalisable ?

46. (X 99) L'endomorphisme de $\mathbf{R}_{2n}[X]$ défini par :

$$P \mapsto X(X+1)\,P' - 2n\,X\,P$$

est-il diagonalisable ?

47. (CCP 2000) Déterminant et polynôme annulateur de :

$$A = (1 + a_i a_j)_{1\leq i,j\leq n}$$

48. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 3. Trouver les sous espaces stables par $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une base de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

49. (1996) Calculer A^n avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

50. (1996) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Calcul de χ_B en fonction de χ_A. Si A est diagonalisable, B l'est-elle ?

51. (Cen 2000) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $M = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A \\ -A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A^2)$ et les sous espaces propres de M. Condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable ?

52. (1996) Soit A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de A^{-1}, A^n, valeurs et vecteurs propres.

53. (1996) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $A^3 = 2A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbf{N}$.

54. (1996) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul de E soit vecteur propre de u. Montrer que u est une homothétie.

55. (1996) $m \in \mathbf{C}$. Discuter la diagonalisation de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

56. (1996) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E, σ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ et u l'endomorphisme de E défini par : $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$. u est-il diagonalisable ?

57. (1996) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$$

Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \det(\mathrm{I}_n + \lambda A) = \det(\mathrm{I}_n + \lambda B)$$

58. (Cen 2001) Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

(a) Comparer les valeurs propres et les sous espaces propres de A et de A^{2001}.

(b) Montrer que l'équation $X^{2001} = A$ n'a qu'une solution diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et que cette solution est un polynôme en A.

(c) Soit B diagonalisable sur $\mathbf{R}$ telle que $A^{2001} = B^{2001}$. Comparer A et B.

(d) Condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $X^{2001} = A$ ait une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

59. (1996) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à valeurs propres distincte, $C(A)$ le commutant de A. Trouver $\dim(D(A))$ où :

$$D(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ C(A) \subset C(M)\}$$

60. (1996) Déterminer les α_i pour que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 2n-1 & 0 & \dots & \alpha_{2n-1} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'ait qu'une valeur propre.

61. (CCP 97 Cen 2003) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ $(\dim E = n)$ tel que :

$$(f - \mathrm{I}_E)^2 \circ (f + 2\mathrm{I}_E) \neq 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{I}_E)^3 \circ (f + 2\mathrm{I}_E) = 0$$

montrer que f n'est pas diagonalisable.

62. (Mines 97 et 2000) Soient $a, b \in \mathbf{R}$, spectre de $M = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ avec $a_{ii} = a$ et $a_{i,j} = b$ si $i \neq j$. Trouver les sous espaces propres associés. Exprimer M^k "sans calculs".

63. (Esim 97)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est-t-elle diagonalisable ?

64. (CCP 97) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $S(X) = \sum_{j=1}^n x_{1j}$. et $\phi(X) = X + S(X)\,A$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donnée. Valeurs propres de ϕ ? Dimension des sous espaces propres ? Conditions sur $S(A)$ pour que ϕ soit diagonalisable ?

65. (ENS Paris 97) Diagonaliser une matrice réelle tridiagonale avec des 0 sur la diagonale et des 1 sur les deux autres diagonales.

66. (Cen 97) Soient U et V deux matrices unicolonnes à coefficients réels, $\alpha \in \mathbf{R}$, $A = \mathrm{I}_n + \alpha U^tV$.

(a) Montrer que A est inversible si et seulement si $1 + \alpha^tUV \neq 0$; calculer alors A^{-1} en fonction de A.

(b) Calculer le spectre de $A - \mathrm{I}_n$ en fonction de α, U, V.

(c) Calculer $\det A$.

67. (Cen 97) Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$.

(a) Montrer l'existence d'un unique $P_n \in E$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbf{R},\ \sin(n+1)\theta = \sin\theta\, P_n(\cos\theta)$$

(b) Prouver que P_n est un vecteur propre d'un endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ de la forme :

$$P \mapsto (X^2 - 1)\,P\text{"} - aX\,P'$$

(c) ϕ est il diagonalisable ?

68. (Mines 97) Soient a et u deux endomorphismes de E de dimension 2 sur $\mathbf{C}$. On suppose $u \neq 0$ et a diagonalisable. Prouver qu'il existe au plus deux endomorphismes non diagonalisables sur la droite affine passant par a et dirigée par u.

69. (Mines 97 et 2001, X 2002) $\dim E = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

(a) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ a n valeurs propres distinctes il est cyclique.

(b) Montrer que si u est nilpotent, il est cyclique si et seulement si $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

(c) Soit u un endomorphisme cyclique de $E = \mathbf{C}^n$.

i. Quelles valeurs peut prendre le rang de u ? Donner un exemple pour chacune de ces valeurs.

ii. Déterminer χ_u.

iii. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

iv. À quelle condition nécessaire et suffisante u est-il diagonalisable ?

v. Soit M la matrice canoniquement associée à u. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :

$$^t\,\mathrm{Com}(M) = P(M)$$

70. (Cen 99) Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances de A.

71. (X 99) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$$F_x = \mathrm{Vect}\left(f^k(x), k \in \mathbf{N}\right)$$

Caractériser les endomorphismes diagonalisables f tels qu'existe un x tel que $F_x = E$.

72. (ENS Paris 97) Diagonaliser $M = [\min(i,j)]_{1 \le i,j \le n}$.

73. (X 97) Calculer rapidement le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

74. (Mines 97) Toutes les matrices de l'exercice appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

(a) Prouver que toute matrice est semblable à une matrice d'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(b) Soient A et B non semblables à $\alpha \mathrm{I}_2$ *(sic)*. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique.

(c) Montrer que toute matrice est semblable à une matrice symétrique.

(d) Montrer que toute matrice est un produit de deux matrices symétriques.

75. (CCP 97) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$. On définit g_n par :

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}$$

Montrer l'existence d'un entier n_0 tel que g_n soit inversible pour $n \geq n_0$.

76. (Cen 97 et 98)

$$P_n(X) = X^n - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} X^k}{n}$$

(a) Montrer que 1 est racine simple de P_n.

(b) Soit z une racine de P_n, montrer que $|z| \leq 1$.

(c) On suppose que $\mathrm{e}^{i\theta}$ est racine de P_n avec $-\pi < \theta \leq \pi$. Montrer, en considérant $\mathrm{Re}\left(n\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,P_n(\mathrm{e}^{i\theta})\right)$ que $\theta = 0$.

(d) Simplifier $Q_n = (X-1)P_n$ et prouver que toutes les racines de P_n sont simples.

(e) Soit $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{C})$ dont le polynôme caractéristique est $t_n(X) = \frac{P_n(X)}{X-1}$. On note $S_p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{Tr}(M^k)$. Montrer que la suite (S_p) converge et montrer que sa limite vaut $\frac{t_n'(1)}{t_n(1)}$, puis calculer explicitement cette limite.

(f) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme caractéristique est P_n. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1/n \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1/n \\ 0 & \dots & 1 & 1/n \end{pmatrix}$$

77. (Centrale 2002 avec Maple) Soit $A \in \mathbf{C}[X]$ et $B \in \mathbf{C}[X]$ de degré n. On considère l'application T_B de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans lui même qui associe au polynôme P le reste de la division de AP par B :

$$P \mapsto AP \mod B$$

(a) Montrer que T_B est un endomorphisme de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$.

(b) On suppose B à racines simples. Montrer que T_B est diagonalisable et en préciser une base de vecteurs propres.

(c) On prend $B = X^n - 1$; $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$. Écrire la matrice de T_B dans la base canonique de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$. Calculer son déterminant.

(d) On prend maintenant $B = (X-1)^2(X+1)$. À quelles conditions sur A, T_B est-il diagonalisable ? Généraliser.

78. (Mines 98) Montrer que le commutant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est un sous espace de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2 ou 4.

79. (X 98) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont les valeurs propres sont les racines n-iemes de l'unité. Soit $c \in \mathbf{C}$ tel que $|c| < 1$. Montrer que $(\mathrm{I}_n - cA)^{-2}$ est un polynôme de degré $\leq n-1$ en A à expliciter.

80. (Mines 98 et Cen 2000) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall i, j,\ a_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

(a) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) = 1$.

(b) Prouver que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_C(A)$, alors $|\lambda| \leq 1$.

(c) Montrer qu'existe $a \in \mathbf{C}$ tel que pour toute valeur propre λ de A on ait $|\lambda - a| < 1$.

81. (CCP 98) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim_C(E) = n$, $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que si λ est valeur propre de u, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. Comparer les vecteurs propres de u et de $P(u)$.
Si u est diagonalisable qu'en est-il de $P(u)$? Réciproquement ?

82. (Cen 98) On appelle seconde diagonale d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la diagonale des $a_{i,n+1-i}$ où $1 \leq i \leq n$. On note s l'application qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe la matrice B dont les coefficients sont symétriques de ceux de A par rapport à la deuxième diagonale.

(a) Montrer que s est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(b) Si $A = s(A)$, A est-elle diagonalisable ?

(c) En s'aidant de Maple, trouver une relation entre les polynômes caractéristiques de A et $s(A)$.

(d) (Non posée au concours) s est-elle diagonalisable ?

83. (ENS 98) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable. A l'est-elle ? Et si le corps est $\mathbf{R}$.

84. (CCP 2000, Cen 2003) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que A^p $(p \geq 1)$ soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ et qu'on peut remplacer cette condition par $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^p$.

85. (Cen 98) $J = (\delta_{i,n+1-j})_{1 \leq i,j \leq n}$. $M = a\mathrm{I}_n + bJ$. M est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres en fonction de a et b.

86. (Cen 98) Déterminer les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbf{Z}^2$ tels que le polynôme $X^2 - \lambda X + \mu$ ait deux racine de module 1.
Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ dont une des puissances vaut I_2.

87. (X 98) On note $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Soit $\Omega \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que tous les éléments de Ω soient à coefficients dans $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ et vérifient la propriété suivante :

$$\forall A \in \Omega,\ \exists p \in \mathbf{N}^* \,/\, A^p = \mathrm{I}_n$$

Montrer que :

$$\exists q \in \mathbf{N}^* \,/\, \forall A \in \Omega,\ A^q = \mathrm{I}_n$$

88. (Mines 99) Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimansion finie, tels que :

$$u \circ v = v \circ u \quad \text{et} \quad (u - \alpha \mathrm{I}_E) \circ (v - \beta \mathrm{I}_E) = 0$$

Quelles sont les valeurs propres de $u + v$?

89. (CCP 2001) Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie d'endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension n qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall k \in [|1, p|] & f_k^2 = -\mathrm{I}_E \\ \forall k,\ j \in [|1, p|] \ / \ k \neq j & f_k \circ f_j + f_j \circ f_k = 0 \end{cases}$$

   (a) $\mathrm{Sp}(f_k)$?

   (b) Diagonalisabilité de f_k ?

   (c) $\mathrm{Tr}(f_k)$?

90. (Cen 2003) Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, on définit un endomorphisme G de $\mathcal{L}(E)$ par :

$$f \mapsto f \circ g - g \circ f$$

   (a) Montrer que si g est nilpotent, G aussi.

   (b) Montrer que si g est diagonalisable, G aussi.

   (c) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, de vecteurs non nuls, il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(x) = y$.

   (d) Montrer que si G est diagonalisble, g aussi. Ce résultat tient-il si le corps est $\mathbf{R}$?

91. (Cen 98, 99, 2000, 2001) $\dim_K(E) = n$. Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\Phi_u(f) = u \circ f \circ u^{-1}$.

   (a) Montrer que Φ_u est un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

   (b) Montrer que si u est diagonalisable, Φ_u aussi.

   (c) Montrer que la réciproque est généralement fausse. On prendra $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

27 novembre 2003

   (d) (Non posée au concours) Montrer que, si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ la réciproque est vraie.

92. (Mines 97) soit f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par :

$$X \mapsto AX$$

Trace ? Rang ? Spectre ?

93. (X99) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $v \in \mathcal{L}(E)$. On note Γ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $u \mapsto u \circ v$. Etudier le lien entre les caractères diagonalisables de v et de Γ.

94. (Mines 2003) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $AB = 0$. Prouver qu'elles ont un vecteur propre commun puis qu'elles sont simultanément trigonalisables.

95. (Cen 98) Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :

$$(A, B) \neq (0, 0), \quad AB - BA = A$$

   (a) Trouver deux matrices vérifiant ces conditions.

   (b) $\mathrm{Tr}(A)$?

   (c) Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$M \mapsto MB - BM$$

   Montrer que c'est un endomorphisme. En donner deux valeurs propres.

   (d) Calculer $\Phi(A^p)$. En déduire que A est nilpotente.

   (e) Valeurs propres de A, χ_A, montrer que $A^n = 0$.

96. (ENS 99) Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

$$M \mapsto AM - MA$$

Que dire de ϕ si A est diagonalisable ? Nilpotente ?

97. (X99) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale dont les éléments diagonaux sont distincts. Que dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :

$$AD^2 - 2DAD + D^2A = 0\ ?$$

98. (X99)
   (a) Montrer que toute matrice complexe est semblable à une matrice triangulaire.
   (b) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On pose $S_j = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| > 0$. Prouver l'inégalité :
$$\sum_{j=1}^n \frac{|a_{jj}|}{S_j} \leq \operatorname{rg} A$$
99. (X98 et cen 99) Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. $A, B, C \in \mathcal{L}(E)$ tels que :
$$AC = CA \qquad BC = CB \qquad AB = BA + C$$
   Prouver que A, B, C ont un vecteur propre commun, puis qu'ils sont cotrigonalisables.
100. (ESPCI 2000 et X 2001) Soient A et B deux matrices carrées de taille n à coefficients réels. On suppose que $A + \lambda B$ est nilpotente pour $n+1$ valeurs de λ. Montrer que A et B sont nilpotentes.
101. (X 2000) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   i) $E = \operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E)$.
   ii) u admet un polynôme annulateur $P \in \mathbf{R}[X]$ dont λ est racine simple.
102. (Ens 2003) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $r_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de A sont dans l'union des disques de centres a_{ii} et de rayons $r_i(A)$.
   (b) Pour $i \neq j$, on définit :
$$B_{ij} = \{z \in \mathbf{C} \ / \ |(z - a_{ii})(z - a_{jj})| \leq r_i(A) r_j(A)\}$$
   Montrer que $\operatorname{Sp}(A) \subset \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} B_{ij}$.
103. (X 2000) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que si :
$$\operatorname{Tr}(A^k) = 0 \ \text{ pour } 1 \leq k \leq r$$
   alors A admet $r+1$ valeur propres non nulles ou est nilpotente.

104. (ESPCI 2001) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous espace propre de f admet un supplémentaire stable par f.
105. (X 2000)
   (a) Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$.
$$\mathcal{E}_{P,Q} = \{R\,P + S\,Q \ / \ (R, S) \in \mathbf{K}[X]^2\}$$
   Etudier la structure de $\mathcal{E}_{P,Q}$ et prouver qu'il existe $A \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\mathcal{E}_{P,Q} = A\,\mathbf{K}[X]$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$. Soit $\phi : M_{n,m}(\mathbf{R}) \to M_{n,m}(\mathbf{R})$ définie par :
$$M \mapsto A\,M - M\,B$$
   Prouver que ϕ est bijective si et seulement si il existe P et Q dans $\mathbf{R}[X]$, premiers entre eux *sic* tels que $P(A) = 0$ et $Q(B) = 0$.