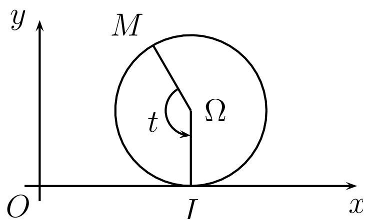
Courbes paramétrées

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 Quelques grands classiques

1. (**) **L'astroïde.**
   (a) a est un réel strictement positif donné. Etudier et construire la courbe de paramétrisation : $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$.
   (b) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.
2. (**) **La cycloïde.**
   (a) Un cercle $(\mathscr{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathscr{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathscr{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathscr{C})$). On pose $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.



   Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).
   (b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.
3. (**) **Une courbe de** LISSAJOUS. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$
4. (**) **La lemniscate de** BERNOULLI. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$
5. (***) **Les tractrices.**
   (a) Trouver les trajectoires orthogonales à la famille des cercles de rayon R ($R > 0$ donné) et centrés sur (Ox).
   (b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(\ln|\tan\frac{t}{2}| + \cos t) \\ y = R\sin t \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

Correction ▼ [005523]

Exercice 2
Construire les courbes de paramétrisations :

1. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \frac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = (t+2)e^{1/t} \\ y = (t-2)e^{1/t} \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = \frac{t}{t^2-1} \\ y = \frac{t+2}{(t-1)^2} \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = t^2+t^3 \\ y = t^2+t^3-2t^4-2t^5 \end{cases}$

Correction ▼ [005524]

Exercice 3

La courbe orthoptique d'une courbe $(\mathscr{C})$ est le lieu des points du plan d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à $(\mathscr{C})$, orthogonales. Déterminer l'orthoptique de $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

1. $(\mathscr{C})$ est un astroïde de paramétrisation $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $a > 0$ donné.
2. $(\mathscr{C})$ est l'arc paramétré : $\begin{cases} x = t^2-2t \\ y = 2t^3-3t^2 \end{cases}$.
3. $(\mathscr{C})$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a,b) \in]0,+\infty[^2$.

Correction ▼ [005525]

Exercice 4

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc paramétré : $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$ [005526]

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe proposée puis construire

$$1)\ x(y^2-x^2) = 2y^2-x^2 \quad 2)\ x^3-y^3+xy-2x+2y+3 = 0$$

[005527]

Exercice 6

Trouver une équation cartésienne des supports des arcs suivants :

1. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = -t^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

3. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$

[005528]

Exercice 7

Soit T l'intersection de (Ox) et de la tangente en M et H le projeté orthogonal de M sur (Ox). Trouver les courbes telles que

1. $MT = a$ ($a > 0$ donné)
2. $HT = a$ (sans rapport avec 1))

[005529]

Correction de l'exercice 1 ▲

(les grands classiques)

1. **L'astroïde.**

   (a) **Domaine d'étude.**

   • Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

   • Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$. Par suite, la courbe complète est obtenue quand t décrit un segment de longueur
   2π comme par exemple $[-\pi, \pi]$.

   • Pour tout réel t,

   $$M(-t) = \begin{pmatrix} \cos^3(-t) \\ \sin^3(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Ox)}(M(t)).$$

   On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

   • Pour tout réel t,

   $$M(t+\pi) = \begin{pmatrix} \cos^3(t+\pi) \\ \sin^3(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

   La portion de courbe obtenue quand t décrit $[-\pi, 0]$ est donc aussi la symétrique par rapport à O de la portion de
   courbe obtenue quand t décrit $[0, \pi]$. Néanmoins, cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine
   d'éude.

   • Pour tout réel t,

   $$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi - t) \\ \sin^3(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

   On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis
   par réflexion d'axe (Ox).

   • Pour tout réel t,

   $$M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix} = s_{y=x}(M(t)).$$

   On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite
   d'équation $y = x$, puis d'axe (Oy) et enfin d'axe (Ox).

   Variations conjointes de x et y. La fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et la fonction $t \mapsto y(t)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **Etude des points singuliers.** Pour $t \in \mathbb{R}$,

   $$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \sin t \\ 3a\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3a\cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

   Pour tout réel t, le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire et n'est donc pas nul. Par suite,

   $$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3a\cos t \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ ou } \sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

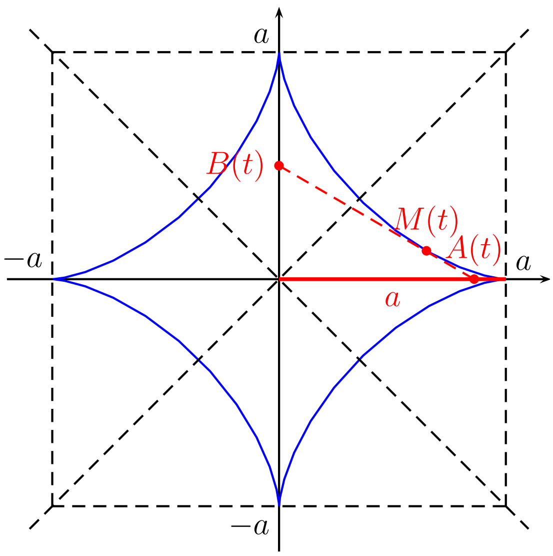
Les points singuliers sont donc les $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $M(t)$ est un point régulier et la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Etudions alors le point singulier $M(0)$. Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} &= \frac{a\sin^3 t}{a\cos^3 t - a} = \frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \\ &= \frac{8\sin^3 \frac{t}{2}\cos^3 \frac{t}{2}}{-2\sin^2 \frac{t}{2}(\cos^2 t + \cos t + 1)} = \frac{-4\sin \frac{t}{2}\cos^3 \frac{t}{2}}{\cos^2 t + \cos t + 1},\end{aligned}$$

et donc, $\lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = 0$. (Si on connaît déjà les équivalents, c'est plus court : $\frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{t^3}{-\frac{t^2}{2}\times 3} = -\frac{2t}{3} \to 0$). La courbe admet en $M(0)$ une tangente dirigée par le vecteur $(1,0)$. Par symétrie, la courbe admet également une tangente en $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $M(\pi)$, dirigée respectivement par $(0,1)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Toujours par symétrie, ces quatre points sont des points de rebroussement de première espèce. Il en résulte aussi que

pour tout réel t, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$.

On en déduit la courbe.



(b) Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a vu que la tangente (T_t) en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$. Une équation cartésienne de T_t est donc : $-\sin t(x - a\cos^3 t) - \cos t(y - a\sin^3 t) = 0$, ou encore

$$x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \ (T_t).$$

On en déduit immédiatement que $A(t)$ a pour coordonnées $(a\cos t, 0)$ et que $B(t)$ a pour coordonnées$(0, b\sin t)$ puis que

$$\boxed{\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[,\ A(t)B(t) = a.}$$

2. **La cycloïde.**

(a) La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overline{OI} = MI$

ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + x_{\overrightarrow{\Omega M}} = Rt + R\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = Rt - R\sin t = R(t - \sin t)$$

et

$$y_M = y_\Omega + y_{\overrightarrow{\Omega M}} = R + R\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = R - R\cos t = R(1 - \cos t).$$

(b) **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

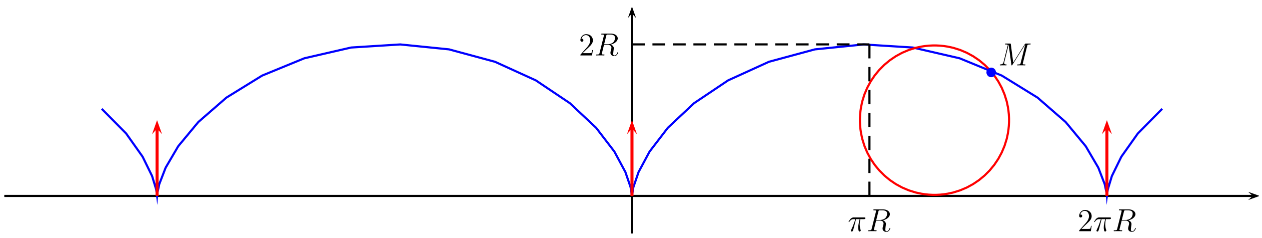
• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t) + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}(2\pi R, 0)$. Par suite, on trace la courbe quand t décrit $[0,2\pi]$ et la
courbe complète est obtenue par translations de vecteurs $k\overrightarrow{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour tout réel t, $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$. On trace la courbe quand t décrit $[0,\pi]$, puis on complète
par réflexion d'axe (Oy) puis par translations.

Etude des points singuliers. Pour $t \in [0,\pi]$, $x'(t) = R(1-\cos t) = 2R\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y'(t) = R\sin t = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \in]0,\pi]$. Dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 2R\sin^2(t/2) \\ 2R\sin(t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Etudions également le point singulier $M(0)$. Pour $t \in]0,\pi]$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{R(1-\cos t)}{R(t-\sin t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = +\infty$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $(0,1)$. Ainsi, dans tous les cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Par symétrie, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x et y sont des fonctions croissantes sur $[0,\pi]$.



3. **une courbe de** Lissajous **Domaine d'étude.**

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$ et la courbe complète est obtenue quand t décrit $[-\pi,\pi]$.

• Pour tout réel t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ \sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0,\pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de
centre O.

• Pour tout réel t,

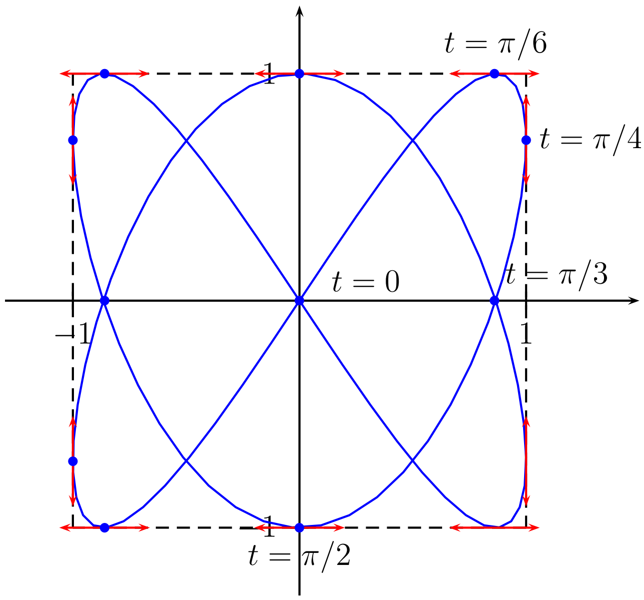
$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi - 2t) \\ \sin(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis

par symétrie centrale de centre O.
• On note aussi que $M(t+\pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, mais cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine
d'étude.
Variations conjointes de x et y. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 2\cos(2t)$ et $y'(t) = 3\cos(3t)$. On en déduit immédiatement le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0			$-$	

puis on en déduit la courbe.



Points multiples. D'abord, tout point de l'arc est multiple, puisque la courbe est parcourue une infinité de fois. Il y a essentiellement deux « vrais points » multiples à déterminer, les autres s'en déduisent par symétrie. L'un des deux est le point de (Ox) d'abscisse strictement positive obtenu pour un certain réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

Le point de la courbe qui est sur (Ox) et qui a une abscisse strictement positive est le point $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Sinon, on cherche $t_1 \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ et $t_2 \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$.

$$M(t_1) = M(t_2) \Rightarrow x(t_1) = x(t_2) \Leftrightarrow t_2 \in t_1 + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z} \Rightarrow t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 - \pi \Rightarrow t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1.$$

Réciproquement, si $t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1$, alors $x(t_1) = x(t_2)$ et donc,

$$M(t_1)=M(t_2)\Leftrightarrow y\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)=y(t_1)\Leftrightarrow \sin\left(3\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)\right)=\sin(3t_1)$$
$$\Leftrightarrow 3t_1\in-\frac{3\pi}{2}-3t_1+2\pi\mathbb{Z}\text{ ou }3t_1\in\pi+\frac{3\pi}{2}+3t_1+2\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 6t_1\in-\frac{3\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow t_1\in-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\Leftrightarrow t_1=\frac{\pi}{12}$$

Le point $M\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est le point multiple d'abscisse et d'ordonnée strictement positives.

4. **La lemniscate de** BERNOULLI **Domaine d'étude.**
• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.
• Pour tout réel t, $M(-t)=s_O(M(t))$. On étudie et construit la courbe quand t décrit $\mathbb{R}^+$ et on obtient la courbe
complète par symétrie centrale de centre O.
• Pour $t>0$,

$$M\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^4}},\frac{\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^4}}\right)=\left(\frac{t^3}{1+t^4},\frac{t}{1+t^4}\right)=s_{y=x}(M(t)).$$

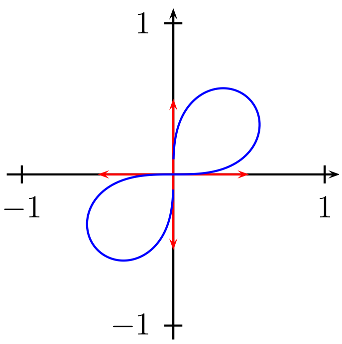
On étudie et construit la courbe quand t décrit $[0,1]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite
d'équation $y=x$ puis par symétrie centrale de centre O. **Variations conjointes de x et y.** Les fonctions x et y sont dérivables sur $[0,1]$ et pour $t\in[0,1]$,

$$x'(t)=\frac{(1+t^4)-t(4t^3)}{(1+t^4)^2}=\frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}\text{ et }y'(t)=\frac{3t^2(1+t^4)-t^3(4t^3)}{(1+t^4)^2}=\frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

On en déduit immédiatement le tableau :

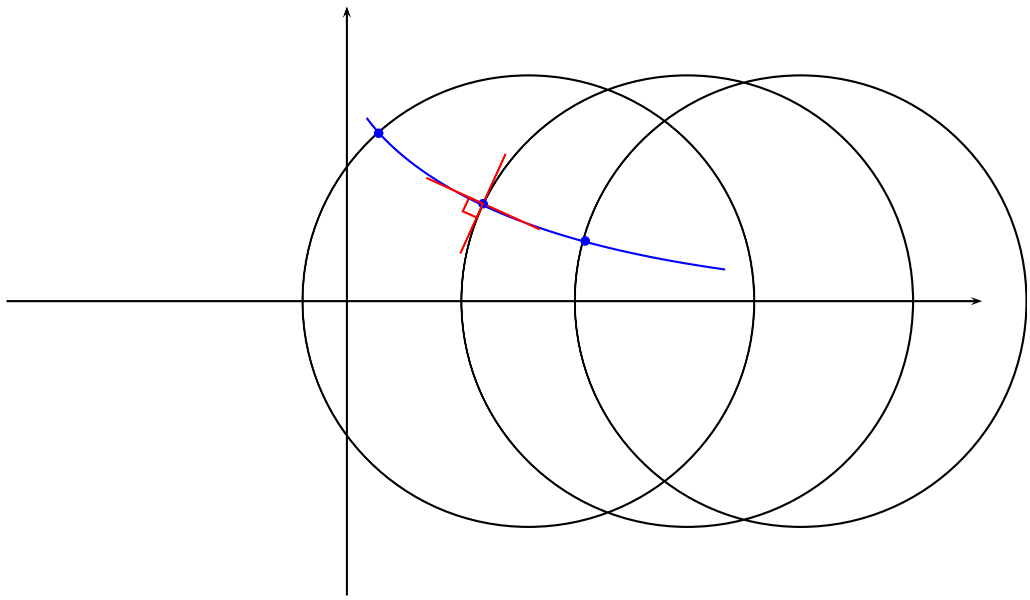
t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$		$+$	0	-	
x	0	$\nearrow$	$\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0		$+$		

La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $(1,0)$. Par symétrie, la tangente en « $M(+\infty)$ » est dirigée par le vecteur $(0,1)$.



5. **Les tractrices**

(a) Cherchons les arcs solutions sous la forme $\begin{cases} x = f(t) + R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ où f est une foncton dérivable sur un certain intervalle I (de sorte que le point $M(t)$ est sur le cercle $\mathscr{C}(t)$ de centre $\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon R). La trajectoire cherchée est orthogonale à chaque cercle $\mathscr{C}(t)$ si et seulement si la tangente à cette trajectoire en $M(t)$ est orthogonale à la tangente au cercle $\mathscr{C}(t)$ en $M(t)$ ou encore « si et seulement si » les vecteurs $(f'(t) - R\sin t, R\cos t)$ et $(-\sin t, \cos t)$ sont orthogonaux. Cette dernière condition s'écrit $-f'(t)\sin t + R(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0$ ou encore $f'(t) = \frac{R}{\sin t}$ ou enfin, $f(t) = R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$. Les arcs solutions sont les arcs de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + C \\ R\sin t \end{pmatrix}$, où $C \in \mathbb{R}$.



Les courbes solutions se déduisent de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) \\ R\sin t \end{pmatrix}$ par translations de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{i}$. On peut montrer que la courbe obtenue est la trajectoire de la roue arrière d'une voiture quand celle-ci se gare en marche avant, la roue avant étant quant à elle collée au trottoir.

(b) **Domaine d'étude.** La fonction $t \mapsto M(t)$ est 2π-périodique et on l'étudie donc sur $[-\pi, \pi]$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(t)$ existe si et seulement si $t \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. Pour $t \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ puis

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)\right| + \cos(\pi - t)\right) \\ R\sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\left(-\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| - \cos t\right) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe quand t décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox). **Dérivée. Etude des points singuliers.** Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) \\ R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ R\cos t \end{pmatrix} = R\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point singulier. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = R(\sin t - 1) = -R\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) \sim -\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$. D'autre part, posons $h = \frac{\pi}{2} - t$ ou encore $t = \frac{\pi}{2} - h$. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$x'(t) = R\frac{\cos^2 t}{\sin t} = R\frac{\sin^2 h}{\cos h} \sim Rh^2 = R\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

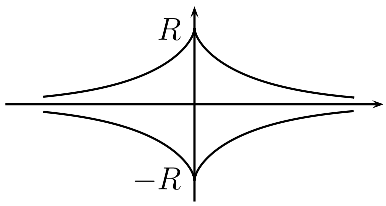
et donc par intégration,

$$x(t) - x(\frac{\pi}{2}) = \frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right) \sim \frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Comme d'autre part, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -R(1-\sin t) = -R(1-\cos h) \sim -\frac{R}{2}h^2 = -\frac{R}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2$, on en déduit que

$$\frac{y(t)-y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t)-x\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{R}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{R}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)},$$

et donc $\lim_{\substack{t\to\frac{\pi}{2} \\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{y(t)-y(\frac{\pi}{2})}{x(t)-x(\frac{\pi}{2})} = +\infty$. Par symétrie d'axe (Oy), la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce. Sinon, x' et y' sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que x et y sont strictement croissantes sur cet intervalle. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers 0. On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe. D'autre part, x croit de $-\infty$ à 0 pendant que y croit de 0 à 1. **Courbe.**



Correction de **l'exercice 2 ▲**

1. **Domaine d'étude.** $M(t)$ existe si et seulement si $t \notin \{-1,1\}$. Sinon, il n'y a pas de symétrie particulière (la fonction y est effectivement paire, mais x n'est ni paire ni impaire).
Dérivée. Pour $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$x'(t) = x(t)(3\ln|t| - 2\ln|t+1| - \ln|t-1|)' = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}\left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)$$
$$= \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \frac{3(t^2-1) - 2(t^2-t) - (t^2+t)}{t(t+1)(t-1)} = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2},$$

et

$$y'(t) = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2)}{(t^2-1)^2} = \frac{-2t}{(t^2-1)^2},$$

ce qui reste vrai par continuité de x et y en 0.
Etude des points singuliers. Pour $t \in]-1,1[$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$. $M(0) = (0,0)$ est l'unique point singulier. Pour $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{t^2}{t^2-1} \frac{(t+1)^2(t-1)}{t^3} = \frac{t+1}{t}.$$

Par suite, $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et vers $-\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs inférieures. La tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{j}$ et d'autre part, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Etude quand t tend vers $\pm\infty$. Quand t tend vers $\pm\infty$, $M(t)$ tend vers le point $(1,1)$. On prolonge la courbe en posant $M(\infty) = 1,1)$. On a alors

$$\frac{y(t)-y(\infty)}{x(t)-x(\infty)} = (\frac{t^2}{t^2-1}-1)(\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}-1)^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{-t^2+t+1} = \frac{t+1}{-t^2+t+1} \sim -\frac{1}{t}.$$

Cette expression tend donc vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$ et la tangente en $M(\infty)$ est dirigée par $\vec{i}$.

Etude quand t tend vers 1. Quand t tend vers 1, $x(t) \sim 14(t-1)$ et $y(t) \sim \frac{1}{2(t-1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim 2$. Puis,

$$y(t)-2x(t) = \frac{t^2}{t^2-1} - 2\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{t^2(t+1)-2t^3}{(t+1)^2(t-1)} = -\frac{t^2}{(t+1)^2}.$$

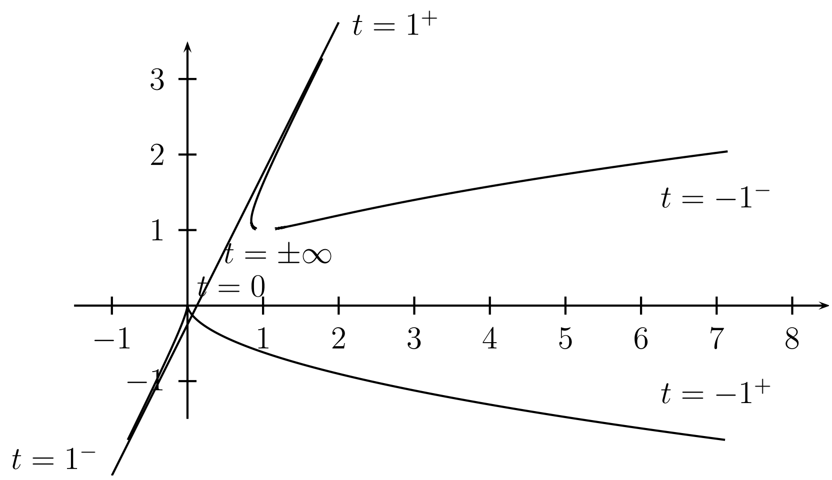
Cette dernière expression tend vers $-\frac{1}{4}$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe.

Etude quand t tend vers -1. Quand t tend vers 1, $x(t) \sim 12(t+1)^2$ et $y(t) \sim \frac{-1}{2(t+1)}$. Donc, x et y tendent vers l'inifini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim -(t+1)$. Par suite, $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers -1. La courbe admet une barnche parabolique de direction (Ox).

Variations conjointes de x et y. On rappelle que pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $x'(t) = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2}$ et $y'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$. On en déduit le tableau suivant :

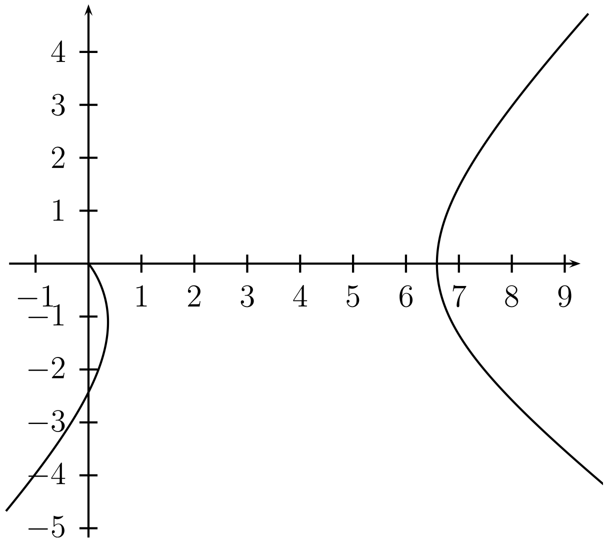
t	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{27}{32}$	↗	1
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{8}$	↘	1
$y'(t)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖		$-$		

On peut noter que la tangente en $M(3)$ est dirigée par le vecteur $\vec{j}$. Voir graphique page suivante.

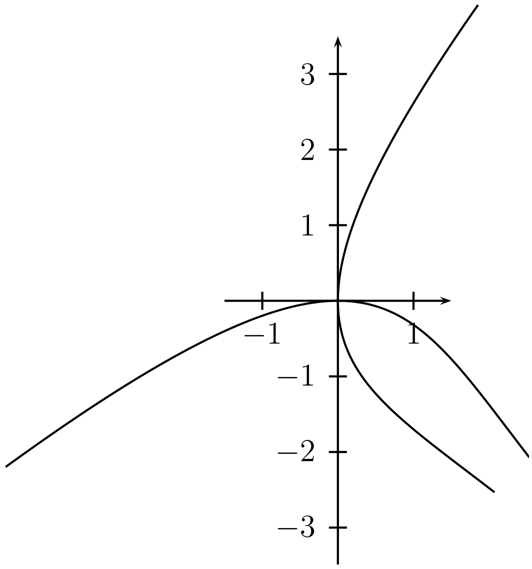


Dans la suite de cet exercice, je ne détaillerai que très peu ou pas du tout l'étude de la courbe.

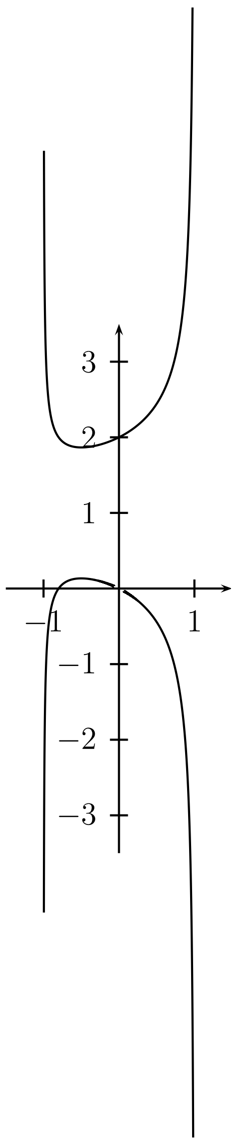
2.



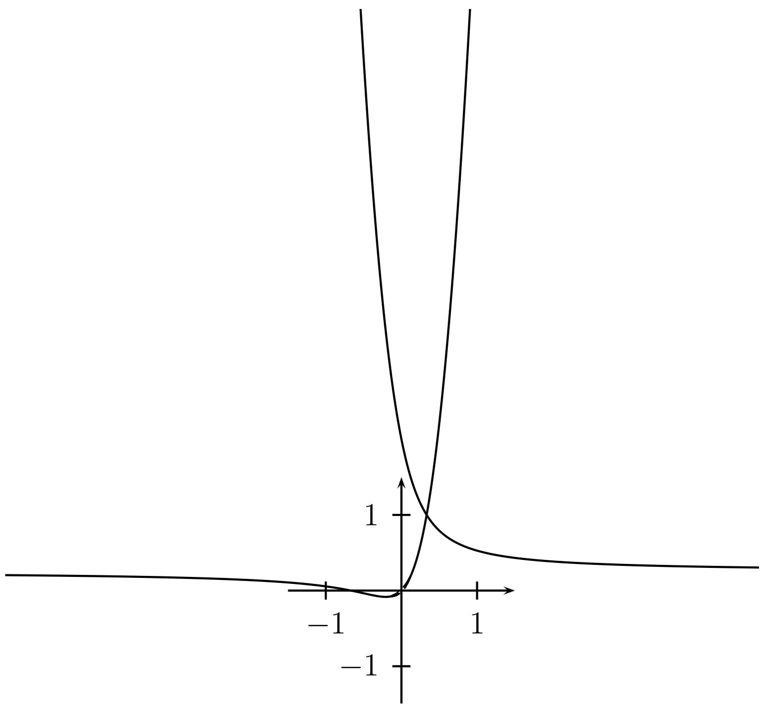
3.



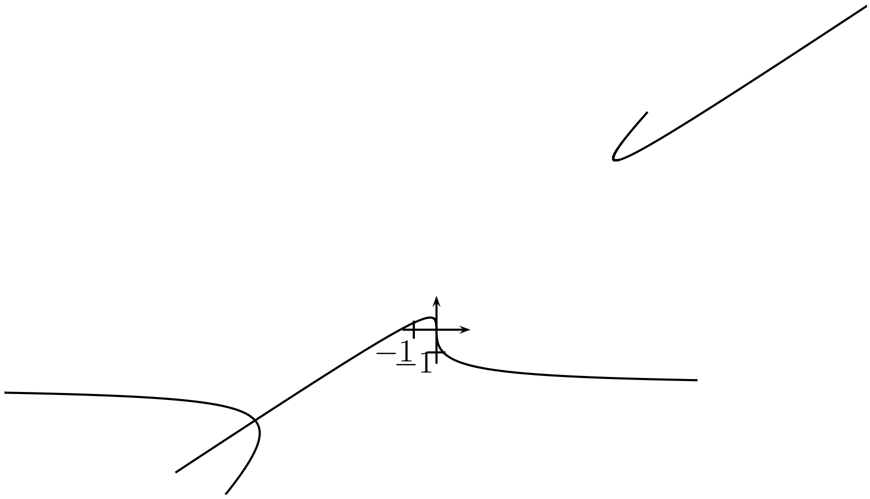
4. $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$



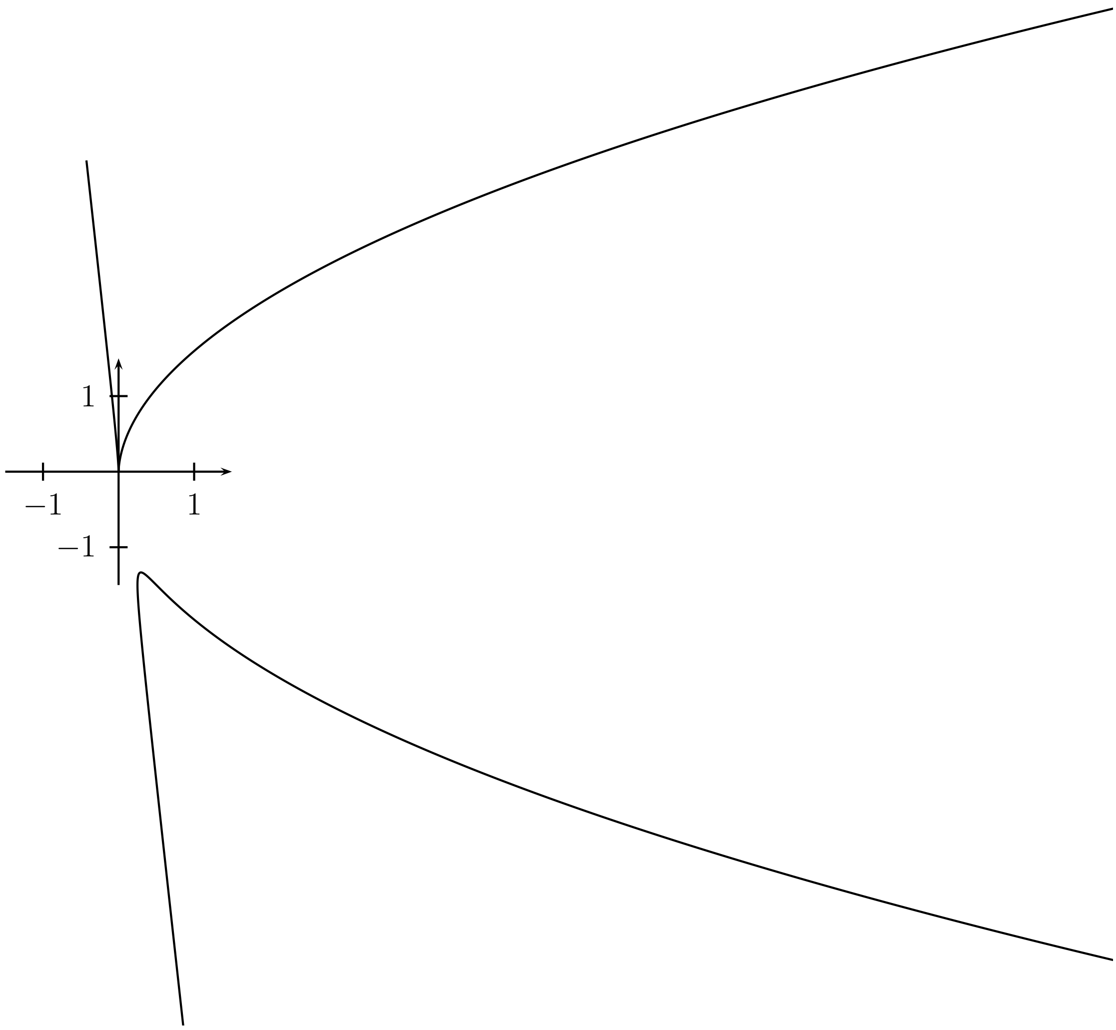
5.



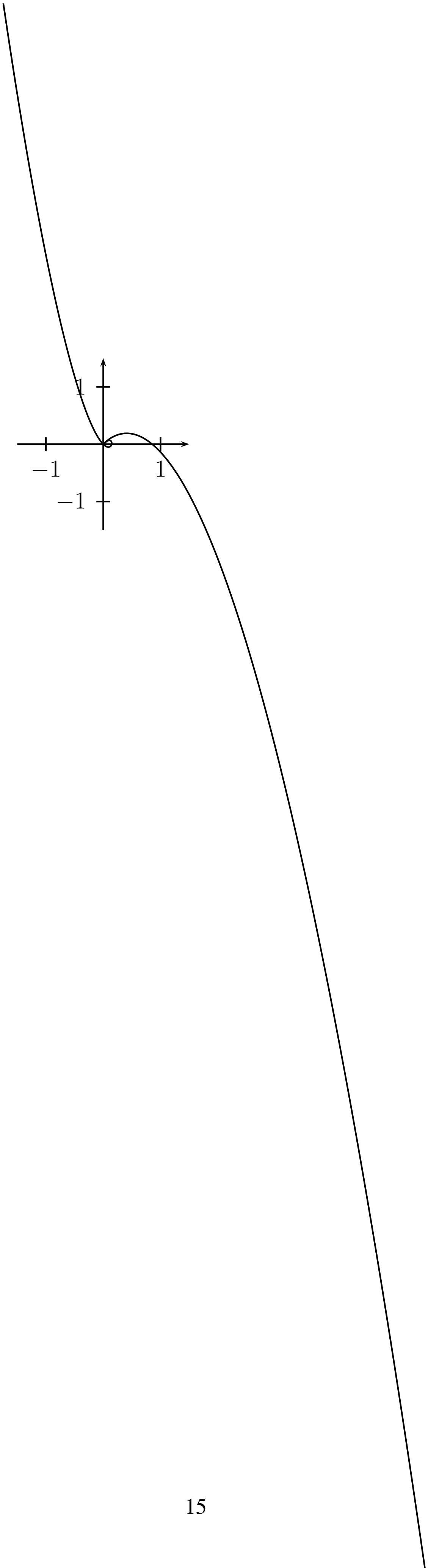
6. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$



7. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{1+3t} \\ y = \frac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$



8. $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$


1
−1
1
−1

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On a vu dans l'exercice 1, que la tangente (T_t) en $M(t)$ est toujours dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (-\cos t, \sin t)$. Une équation de la tangente en $M(t)$ est donc $\sin t(x - a\cos^3 t) + \cos t(y - a\sin^3 t) = 0$ ou encore

$$x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \ (T_t).$$

Soit $(t,u) \in [-\pi,\pi]^2$.

$$(T_t)\perp(T_u) \Leftrightarrow \vec{u}(t)|\vec{u}(u) = 0 \Leftrightarrow \cos t\cos u + \sin t\sin u = 0 \Leftrightarrow \cos(t-u) = 0 \Leftrightarrow u \in t + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Il est alors clair que l'orthoptique est l'ensemble des points d'intersection des tangente (T_t) et $(T_{t+\frac{\pi}{2}})$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

$$M(x,y)\ (T_t)\cap(T_{t+\frac{\pi}{2}}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\sin t + y\cos t = a\sin t\cos t \\ x\cos t - y\sin t = -a\sin t\cos t \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x = -\begin{vmatrix} a\sin t\cos t & \cos t \\ -a\sin t\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \text{ et } y = -\begin{vmatrix} \sin t & a\sin t\cos t \\ \cos t & -a\sin t\cos t \end{vmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = a\sin t\cos t(-\cos t + \sin t) \text{ et } y = a\sin t\cos t(\cos t + \sin t)$$

L'orthoptique cherchée est la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} a\sin t\cos t(-\cos t + \sin t) \\ a\sin t\cos t(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$.