



## Coniques

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
 I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ . Éléments caractéristiques de la conique dont une équation cartésienne dans  $\mathcal{R}$  est

- 1.  $y^2 = x$ ,
- 2.  $y^2 = -x$ ,
- 3.  $y = x^2$ ,
- 4.  $y = -x^2$ .
- 1.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,
- 2.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ,
- 3.  $x^2 + 2y^2 = 1$ .
- 1.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ,
- 2.  $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,
- 3.  $x^2 - y^2 = 1$ .

[Correction ▼](#)

[005540]

### Exercice 2 \*IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ . Éléments caractéristiques de la courbe dont une équation dans  $\mathcal{R}$  est

- 1.  $y = x^2 + x + 1$ ,
- 2.  $y^2 + y - 2x = 0$ ,
- 3.  $y = \sqrt{2x+3}$ .
- 1.  $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$ ,
- 2.  $y = -2\sqrt{-x^2+x}$ .
- $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005541]

### Exercice 3 \*\*IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ . Nature et éléments caractéristiques de la courbe dont une équation en repère orthonormé est

1.  $y = \frac{1}{x}$ ,
2.  $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 = 0$ ,
3.  $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$ ,
4.  $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$ ,

5.  $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$ ,
6.  $x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0$ ,
7.  $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$ ,
8.  $(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005542]

#### Exercice 4 \*IT

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1.  $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ ,
2.  $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$ ,
3.  $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$ ,
4.  $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$ ,
5.  $r = \frac{1}{2-\cos\theta}$ .

[Correction ▼](#)

[005543]

#### Exercice 5 \*\*\*

Déterminer l'image du cercle trigonométrique par la fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  .  
 $z \mapsto \frac{1}{1+z+z^2}$

[Correction ▼](#)

[005544]

#### Exercice 6 \*\*

Déterminer l'orthoptique d'une parabole, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole, perpendiculaires l'une à l'autre.

[Correction ▼](#)

[005545]

#### Exercice 7 \*\*\*

1. **Droite de SIMSON.** Soit  $(A, B, C)$  un triangle et  $M$  un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux  $P, Q$  et  $R$  de  $M$  sur les cotés  $(BC), (CA)$  et  $(AB)$  du triangle  $(ABC)$  sont alignés si et seulement si  $M$  est sur le cercle circonscrit à  $(ABC)$ . La droite passant par  $P, Q$  et  $R$  s'appelle la droite de SIMSON du point  $M$  relativement au triangle  $ABC$  (ou au cercle  $(ABC)$ ).
2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. En particulier, fournir la construction des points de contacts.

[Correction ▼](#)

[005546]

#### Exercice 8 \*\*

$(\mathcal{C})$  est le cercle de diamètre  $[A, B]$ .  $(D)$  est la tangente en  $A$  à  $(\mathcal{C})$ .  $P$  est un point variable sur  $(\mathcal{C})$  et  $(T)$  la tangente en  $P$  à  $(\mathcal{C})$ .  $(T)$  recoupe  $(D)$  en  $S$ . La perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $P$  coupe  $(BS)$  en  $M$ . Ensemble des points  $M$  ?

[Correction ▼](#)

[005547]

#### Exercice 9 \*\*\*

Soit, dans  $\mathbb{R}^3$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , la courbe  $(\Gamma)$  d'équations  $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ .  
 Montrer que  $(\Gamma)$  est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

[Correction ▼](#)

[005548]

#### Exercice 10 \*

---

Que vaut l'excentricité de l'hyperbole équilatère (une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires) ?

[Correction ▼](#)

[005549]

---

**Exercice 11** \*\*\*

Soit  $P$  un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation  $P(x) = P(y)$  dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

[Correction ▼](#)

[005550]

---

**Exercice 12** \*\*\*

Soit  $(\mathcal{H})$  une hyperbole équilatère de centre  $O$  et  $P$  et  $Q$  deux points de  $(\mathcal{H})$  symétriques par rapport à  $O$ . Montrer que le cercle de centre  $P$  et de rayon  $PQ$  recoupe  $(\mathcal{H})$  en trois points formant un triangle équilatéral de centre  $P$ .

[Correction ▼](#)

[005551]

---

**Exercice 13** \*\*\*

Equation cartésienne de la parabole tangente à  $(Ox)$  en  $(1,0)$  et à  $(Oy)$  en  $(0,2)$ .

[Correction ▼](#)

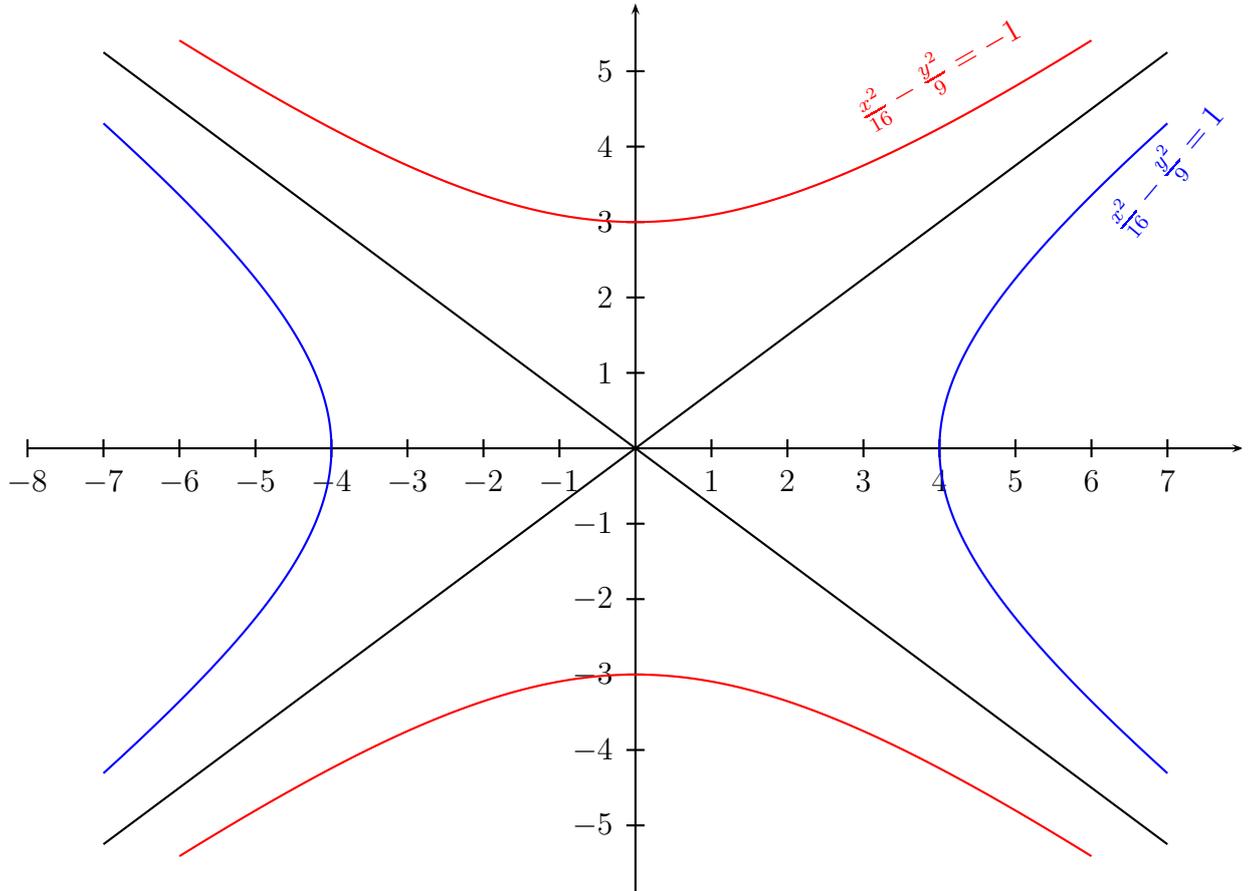
[005552]

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

On note  $\mathcal{C}$  la courbe considérée.

1. (a)  $\mathcal{C}$  est la parabole de sommet  $O$ , d'axe focal  $(Ox)$ , de paramètre  $p = \frac{1}{2}$  tournée vers les  $x$  positifs. Son foyer est le point  $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$  et sa directrice est  $\mathcal{D} : x = -\frac{1}{4}$ .
- (b)  $\mathcal{C}$  est la parabole de sommet  $O$ , d'axe focal  $(Ox)$ , de paramètre  $p = \frac{1}{2}$  tournée vers les  $x$  négatifs. Son foyer est le point  $F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$  et sa directrice est  $\mathcal{D} : x = \frac{1}{4}$ .
- (c)  $\mathcal{C}$  est la parabole de sommet  $O$ , d'axe focal  $(Oy)$ , de paramètre  $p = \frac{1}{2}$  tournée vers les  $y$  positifs. Son foyer est le point  $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$  et sa directrice est  $\mathcal{D} : y = -\frac{1}{4}$ .
- (d)  $\mathcal{C}$  est la parabole de sommet  $O$ , d'axe focal  $(Oy)$ , de paramètre  $p = \frac{1}{2}$  tournée vers les  $y$  négatifs. Son foyer est le point  $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$  et sa directrice est  $\mathcal{D} : y = \frac{1}{4}$ .
2. (a)  $\mathcal{C}$  est une ellipse, de centre  $O$  avec  $a = 5 > 3 = b$  et donc d'axe focal  $(Ox)$ . Ses sommets sont  $A(5, 0)$ ,  $A'(-5, 0)$ ,  $B(0, 3)$  et  $B'(0, -3)$ .  
 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$  et donc les foyers sont  $F(4, 0)$  et  $F'(-4, 0)$ .  
L'excentricité  $e$  vaut  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ .  
Les directrices ont pour équations respectives  $x = \frac{a}{e} = \frac{25}{4}$  et  $x = -\frac{25}{4}$ .
- (b)  $\mathcal{C}$  est une ellipse, de centre  $O$  avec  $a = 3 < 5 = b$  et donc d'axe focal  $(Oy)$ . Ses sommets sont  $A(3, 0)$ ,  $A'(-3, 0)$ ,  $B(0, 5)$  et  $B'(0, -5)$ .  
 $c = \sqrt{b^2 - a^2} = 4$  et donc les foyers sont  $F(0, 4)$  et  $F'(0, -4)$ .  
L'excentricité  $e$  vaut  $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$ .  
Les directrices ont pour équations respectives  $y = \frac{b}{e} = \frac{25}{4}$  et  $y = -\frac{25}{4}$ .
- (c)  $x^2 + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ .  
 $\mathcal{C}$  est une ellipse, de centre  $O$  avec  $a = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} = b$  et donc d'axe focal  $(Ox)$ .  
Ses sommets sont  $A(1, 0)$ ,  $A'(-1, 0)$ ,  $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $B'\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .  
 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et donc les foyers sont  $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  et  $F'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ .  
L'excentricité  $e$  vaut  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
Les directrices ont pour équations respectives  $x = \frac{a}{e} = \sqrt{2}$  et  $x = -\sqrt{2}$ .
3. (a)  $\mathcal{C}$  est une hyperbole de centre  $O$  et d'axe focal  $(Ox)$  avec  $a = 4$  et  $b = 3$  et donc  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ , puis  $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ .  
Les sommets sont  $A(4, 0)$  et  $A'(-4, 0)$  et les foyers sont  $F(5, 0)$  et  $F'(-5, 0)$ .  
Les directrices sont les droites d'équations respectives  $x = \frac{a}{e} = \frac{16}{5}$  et  $x = -\frac{16}{5}$ .  
Les asymptotes sont les droites d'équations respectives  $y = \frac{3}{4}x$  et  $y = -\frac{3}{4}x$ .
- (b)  $\mathcal{C}$  est une hyperbole de centre  $O$  et d'axe focal  $(Oy)$  avec  $a = 4$  et  $b = 3$  et donc  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ , puis  $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$ .  
Les sommets sont  $B(0, 3)$  et  $B'(0, -3)$  et les foyers sont  $F(0, 5)$  et  $F'(0, -5)$ .  
Les directrices sont les droites d'équations respectives  $y = \frac{b}{e} = \frac{9}{5}$  et  $y = -\frac{9}{5}$ .  
Les asymptotes sont les droites d'équations respectives  $y = \frac{3}{4}x$  et  $y = -\frac{3}{4}x$ .



- (c)  $\mathcal{C}$  est une hyperbole de centre  $O$  et d'axe focal  $(Ox)$  avec  $a = b = 1$  et donc  $c = \sqrt{2}$ , puis  $e = \sqrt{2}$ .  
 Les sommets sont  $A(1,0)$  et  $A'(-1,0)$  et les foyers sont  $F(\sqrt{2},0)$  et  $F(-\sqrt{2},0)$ .  
 Les directrices sont les droites d'équations respectives  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
 Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives  $y = x$  et  $y = -x$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

- (a)  $y = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow y = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow (y - \frac{3}{4}) = (x + \frac{1}{2})^2$ .  $\mathcal{C}$  est la parabole de sommet  $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , d'axe focal la droite d'équation  $x = -\frac{1}{2}$ , de paramètre  $p = \frac{1}{2}$  et donc de foyer  $F(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}) = (-\frac{1}{2}, 1)$  et de directrice d'équation  $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ .
  - (b)  $y^2 + y - 2x = 0 \Leftrightarrow (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2x = 0 \Leftrightarrow (y + \frac{1}{2})^2 = 2(x + \frac{1}{8})$ .  $\mathcal{C}$  est la parabole de sommet  $S(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2})$ , d'axe focal la droite d'équation  $y = -\frac{1}{2}$ , de paramètre  $p = 1$  et donc de foyer  $F(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (\frac{3}{8}, -\frac{1}{2})$  et de directrice d'équation  $x = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}$ .
  - (c)  $y = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2 = 2(x + \frac{3}{2})$  et  $y \geq 0$ .  $\mathcal{C}$  est une demi-parabole de sommet  $S(-\frac{3}{2}, 0)$ , d'axe focal  $(Ox)$ , de paramètre  $p = 1$  et donc de foyer  $F(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, 0) = (-1, 0)$  et de directrice d'équation  $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$ .
- (a)  $x^2 + x + 2y^2 + y = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + 2(y + \frac{1}{4})^2 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{(x + \frac{1}{2})^2}{(\frac{\sqrt{3}}{8})^2} + \frac{(y + \frac{1}{4})^2}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} = 1$ .  $\mathcal{C}$  est une ellipse. Centre :  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ .  
 $a = \sqrt{\frac{3}{8}} > \frac{\sqrt{3}}{4} = b$ . Axe focal :  $y = -\frac{1}{4}$ . Sommets :  $A(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{4})$ ,  $A'(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{4})$ ,  $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4})$  et  $B'(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4})$ .  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Foyers :  $F(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$  et  $F'(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$ .  
 Directrices :  $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(b)  $y = -2\sqrt{-x^2+x} \Leftrightarrow y^2 = 4(-x^2+x)$  et  $y \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} + y^2 = 1$  et  $y \leq 0$ .  $\mathcal{C}$  est une demi-ellipse.  
 Centre :  $(\frac{1}{2}, 0)$ .  $a = \frac{1}{2} < 1 = b$ . Axe focal :  $x = 0$ . Sommets :  $A(1, 0)$ ,  $A'(0, 0)$  et  $B'(\frac{1}{2}, -1)$ .  $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Foyers :  $F(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  et  $F'(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ . Directrices :  $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$  et  $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

3.  $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = -1$ .  $\mathcal{C}$  est une hyperbole de centre  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et d'axe focal la droite d'équation  $x = -\frac{1}{2}$ .  $a = b = 1$ . Sommets :  $B(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  et  $B'(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$  puis  $e = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$ . Foyers :  $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{2})$  et  $F'(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2})$ . Directrices :  $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Asymptotes :  $y = x + 1$  et  $y = -x$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. On note  $\mathcal{H}$  l'hyperbole considérée. On tourne de  $\frac{\pi}{4}$ . Pour cela, on pose  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$ . On a alors

$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X - Y)(X + Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Ainsi, si  $\mathcal{R}$  est le repère orthonormé initial  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{R}'$  est le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$  où  $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$  et  $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ , une équation de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{R}$  est  $xy = 1$  et une équation de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{R}'$  est  $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ . On obtient  $a = b = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$  et  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ . Les formules de changement

de repère s'écrivent  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$  et les formules inverses s'écrivent

$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases}$  (dans ce qui suit, les coordonnées d'un point dans  $\mathcal{R}'$  seront notées avec  $\mathcal{R}'$  en indice alors que les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  seront notées sans écrire  $\mathcal{R}$  en indice).

Centre  $O(0,0)$

Asymptotes : bien sûr, les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

Axe focal : l'axe  $(OX)$  ou encore la droite d'équation  $y = x$  (dans  $\mathcal{R}$ ).

Sommets :  $A(\sqrt{2}, 0)_{\mathcal{R}'}$ ,  $A'(-\sqrt{2}, 0)_{\mathcal{R}'}$  et donc **Sommets  $A(1,1)$  et  $A'(-1,-1)$**

Foyers :  $F(2, 0)_{\mathcal{R}'}$ ,  $F'(-2, 0)_{\mathcal{R}'}$  et donc **Foyers  $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  et  $F'(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .**

Directrices : les droites d'équations  $X = \pm \frac{a}{e} = \pm 1$  et donc dans  $\mathcal{R}$ , les droites d'équations respectives  $x + y = \pm\sqrt{2}$ .

2. Le discriminant de cette conique vaut  $41 \times 34 - 12^2 = 1250 > 0$ . Il s'agit donc d'une conique du genre ellipse. On pose  $\begin{cases} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{cases}$  et on détermine  $\theta$  (ou plutôt  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ ) de sorte que le terme en  $XY$  disparaisse. Mais, le coefficient de  $XY$  dans

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 41(\cos(\theta)X - \sin(\theta)Y)^2 - 24(\cos(\theta)X - \sin(\theta)Y)(\sin(\theta)X + \cos(\theta)Y) + 34(\sin(\theta)X + \cos(\theta)Y)^2$$

vaut

$$-82 \cos \theta \sin \theta - 24(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 68 \cos \theta \sin \theta = -24(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 14 \cos \theta \sin \theta.$$

Ce coefficient est nul si et seulement si  $-12 \cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta - 7 \cos \theta \sin \theta = 0$  ou encore, après division par  $\cos^2 \theta$ ,  $12 \tan^2 \theta - 7 \tan \theta - 12 = 0$ . On peut alors prendre  $\tan \theta = \frac{4}{3}$ , puis on peut prendre  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \frac{3}{5}$  et  $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$ .

Posons donc  $\begin{cases} x = \frac{3X-4Y}{5} \\ y = \frac{4X+3Y}{5} \end{cases}$  (\*). On a alors

$$\begin{aligned} 41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 &= \frac{1}{25}(41(3X-4Y)^2 - 24(3X-4Y)(4X+3Y) + 34(4X+3Y)^2 \\ &\quad - 530(3X-4Y) + 460(4X+3Y) + 1850) \\ &= \frac{1}{25}(625X^2 + 1250Y^2 + 250X + 3500Y + 1850) \\ &= 25 \left( X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} \right) \end{aligned}$$

Une équation de la courbe dans le repère défini par (\*) est donc  $X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} = 0$ . Ensuite,

$$X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} = 0 \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(Y + \frac{7}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{\left(Y + \frac{7}{5}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

$\mathcal{C}$  est une ellipse. On trouve  $a = 1$ ,  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $c = 1$   $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$  puis Centre  $\Omega(1, -1)$ . Axe focal :  $3x + 4y + 1 = 0$  et axe non focal :  $-4x + 3y + 7 = 0$ .

Sommets :  $A\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ ,  $A'\left(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ ,  $B\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$  et  $B'\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ .

Foyers :  $F\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$  et  $F'\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ . Directrices :  $4x - 3y + 3 = 0$  et  $4x - 3y + 17 = 0$ .

3.  $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ . On pose donc  $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$  ou encore  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2Y^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(X+Y) - \frac{2}{\sqrt{2}}(-X+Y) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}X + \frac{15}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(X + \frac{3}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$  est une parabole de paramètre  $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$ .

Sommet :  $S\left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$ . Axe focal :  $x + y + \frac{1}{4} = 0$ .

Foyer :  $F\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$ . Directrice :  $x - y - \frac{1}{4} = 0$ .

4.  $\mathcal{C}$  est le point d'intersection des droites d'équation  $x - y + 1 = 0$  et  $x + y - 1 = 0$  c'est-à-dire le point de coordonnées  $(0, 1)$ .

5.  $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$  et donc  $\mathcal{C}$  est vide.

6.  $x(x-1) + (y-2)(y-3) = 0$  est une équation du cercle de diamètre  $[AB]$  où  $A(0, 2)$  et  $B(1, 3)$ .

7. Si on pose  $\begin{cases} X = x + y + 1 \\ Y = x - y + 3 \end{cases}$ , on effectue un changement de repère non orthonormé. Dans le nouveau repère,  $\mathcal{C}$  admet pour équation cartésienne  $XY = 3$  et donc  $\mathcal{C}$  est une hyperbole. Avec le changement de repère effectué, on obtient directement les éléments affines de cette hyperbole mais pas ses éléments métriques : hyperbole d'asymptotes les droites d'équations  $x + y + 1 = 0$  et  $x - y + 3 = 0$  et donc de centre  $(-2, 1)$ . Pour obtenir l'axe focal, l'excentricité, les foyers et les directrices il faut faire un changement de repère orthonormé.

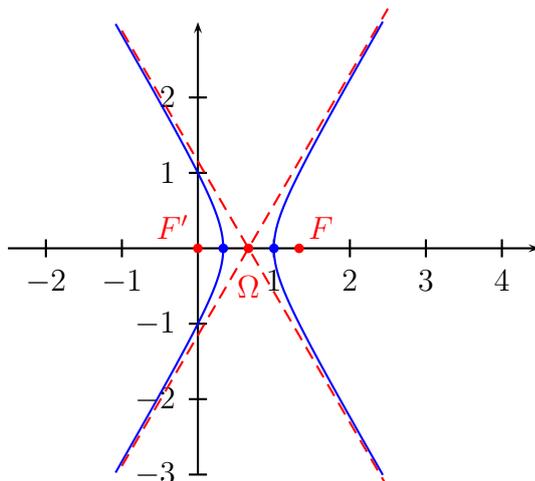
8. Si on pose  $\begin{cases} X = 2x + y + 1 \\ Y = 3x + 3y \end{cases}$ ,  $\mathcal{C}$  admet pour équation cartésienne dans le nouveau repère  $Y = X^2$  et donc  $\mathcal{C}$  est une parabole. Pour obtenir ces éléments métriques, il faut un changement de repère orthonormé.

### Correction de l'exercice 4 ▲

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

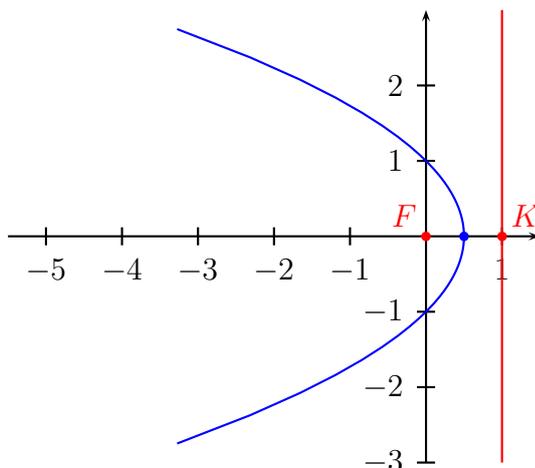
$$1) r = \frac{1}{1+2\cos\theta} \quad 2) r = \frac{1}{1+\cos\theta} \quad 3) r = \frac{1}{2+\cos\theta} \quad 4) r = \frac{1}{1-\sin\theta} \quad 5) r = \frac{1}{2-\cos\theta}.$$

1.  $\mathcal{C}$  est une conique d'excentricité 2 et donc une hyperbole.



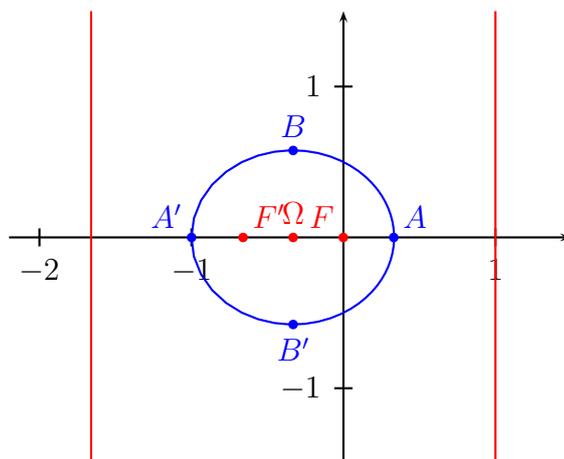
L'axe focal est  $(Ox)$ . Les sommets sont les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $(Ox)$  c'est-à-dire les points  $M(0)$  et  $M(\pi)$  de coordonnées cartésiennes respectives  $A'(\frac{1}{3}, 0)$  et  $A(1, 0)$ . Le centre  $\Omega$  est le milieu de  $[AA']$  c'est-à-dire  $\Omega(\frac{2}{3}, 0)$ . L'un des foyers est  $F' = O$  et l'autre est le symétrique de  $F'$  par rapport à  $\Omega$  : c'est le point  $F(\frac{4}{3}, 0)$ . Puisque  $a = \frac{1}{3}$  et  $e = 2$ , les directrices sont les droites d'équation  $x = x_\Omega - \frac{a}{e} = \frac{1}{2}$  et  $x = \frac{5}{6}$ . Les branches infinies sont obtenues pour  $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$ . Les asymptotes sont donc les droites passant par  $\Omega$  d'angle polaire  $\pm \frac{2\pi}{3}$ . Ce sont les droites d'équations cartésiennes  $y = \pm\sqrt{3}(x - \frac{2}{3})$ .

2.  $\mathcal{C}$  est une conique d'excentricité 1 et donc une parabole.



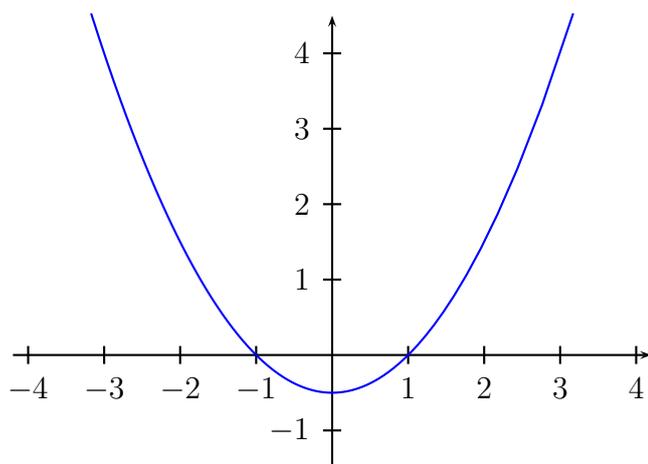
L'axe focal est  $(Ox)$ . Le sommet est le point  $M(0)$  de coordonnées cartésiennes  $S(\frac{1}{2}, 0)$ . Le foyer est  $F = O$ . Le point  $K$  est le symétrique de  $F$  par rapport à  $S$  et a pour coordonnées  $(1, 0)$ . La directrice a donc pour équation  $x = 1$ .

3.  $\mathcal{C}$  est une conique d'excentricité  $e = \frac{1}{2}$  et donc une ellipse.

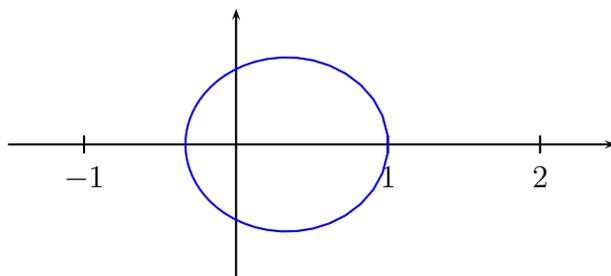


L'axe focal est  $(Ox)$ . Les sommets sur cet axe sont  $A = M(0)$  de coordonnées  $(\frac{1}{3}, 0)$  et  $A' = M(\pi)$  de coordonnées  $(-1, 0)$ . Le centre  $\Omega$  est le milieu de  $[AA']$  et a pour coordonnées  $(-\frac{1}{3}, 0)$ . L'un des foyers est  $F = O$ . L'autre est le symétrique de  $F$  par rapport à  $\Omega$  : c'est le point  $F'$  de coordonnées  $(-\frac{2}{3}, 0)$ . Par suite,  $c = \frac{1}{3}$   $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . D'où les sommets  $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  et  $B'(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ . Les directrices sont les droites d'équations  $x = x_\Omega + \frac{a}{e} = 1$  et  $x = -\frac{5}{3}$ .

4.  $M(\theta - \frac{\pi}{2}) = [r(\theta - \frac{\pi}{2}), \theta - \frac{\pi}{2}] = [\frac{1}{1+\cos\theta}, \theta - \frac{\pi}{2}] = \text{rot}_{O, -\pi/2}([\frac{1}{1+\cos\theta}, \theta])$ . Donc  $\mathcal{C}$  est l'image de la parabole d'équation polaire  $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$  par le quart de tour indirect de centre  $O$ .



5.  $M(\theta + \pi) = [r(\theta + \pi), \theta + \pi] = [\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta + \pi] = s_O([\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta])$ . Donc  $\mathcal{C}$  est l'image de l'ellipse d'équation polaire  $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$  par la symétrie centrale de centre  $O$ .



### Correction de l'exercice 5 ▲

Un point du plan est sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 si et seulement si son affixe  $z$  est de module 1 ou encore si et seulement si il existe un réel  $\theta$  tel que  $z = e^{i\theta}$ . Or, pour  $\theta$  réel,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + 1 + e^{-i\theta}} = \overline{\left( \frac{e^{i\theta}}{1 + 2\cos\theta} \right)}.$$

L'ensemble cherché est donc la symétrique par rapport à  $(Ox)$  de la courbe d'équation polaire  $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ . Cette dernière est une ellipse, symétrique par rapport à  $(Ox)$ . Donc l'ensemble cherché est l'ellipse d'équation polaire  $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$  (voir l'exercice 4, 1)).

### Correction de l'exercice 6 ▲

Dans un certain repère orthonormé, la parabole  $\mathcal{P}$  admet une équation cartésienne de la forme  $x^2 = 2py$ . D'après la règle de dédoublement des termes, une équation de la tangente  $\mathcal{T}_{x_0}$  en un point  $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2p}\right)$  de  $\mathcal{P}$  est

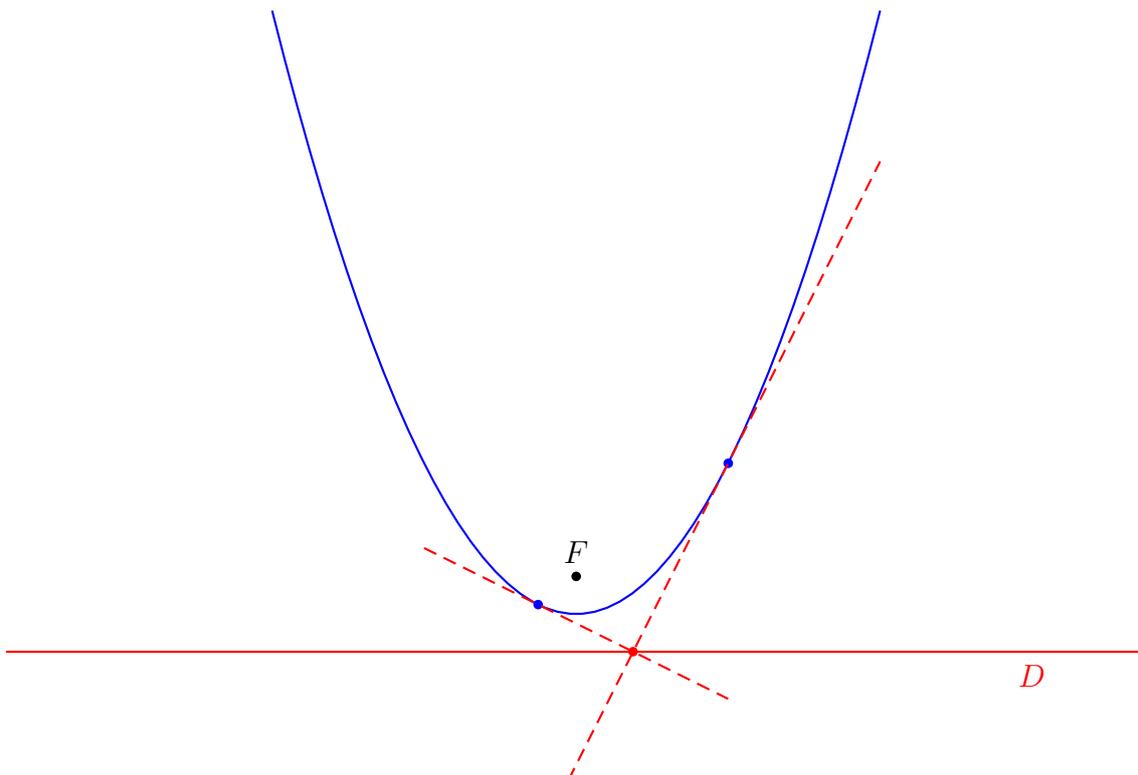
$$xx_0 = p(y + y_0).$$

Les tangentes en  $M_0(x_0, y_0)$  et  $M_1(x_1, y_1)$  sont perpendiculaires si et seulement si  $x_0x_1 + p^2 = 0$ . L'orthoptique  $\mathcal{C}$  est donc l'ensemble des points d'intersection de  $\mathcal{T}_{x_0}$  et  $\mathcal{T}_{-p^2/x_0}$  où  $x_0$  décrit  $\mathbb{R}^*$ .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} xx_0 = p\left(y + \frac{x_0^2}{2p}\right) \\ -x\frac{p^2}{x_0} = p\left(y + \frac{p^3}{2x_0^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} tx - py = \frac{t^2}{2} \\ px + ty = -\frac{p^3}{2t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} x = \frac{1}{t^2+p^2} \left(\frac{t^3}{2} - \frac{p^4}{2t}\right) \\ y = \frac{1}{t^2+p^2} \left(-\frac{p^3}{2} - \frac{pt^2}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} x = \frac{t^2-p^2}{2t} \\ y = -\frac{p}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Maintenant,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2-p^2}{2t} = -\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2-p^2}{2t} = +\infty$ . Comme la fonction  $t \mapsto \frac{t^2-p^2}{2t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , quand  $t$  décrit  $]0, +\infty[$ ,  $x = \frac{t^2-p^2}{2t}$  décrit  $\mathbb{R}$ . Finalement, l'orthoptique  $\mathcal{C}$  est la droite d'équation  $y = -\frac{p}{2}$  ou encore

**l'orthoptique d'une parabole est sa directrice.**



**Correction de l'exercice 7 ▲**

1. Soit  $M$  un point du plan. **1er cas.** Supposons que  $M \notin (AB) \cup (AC) \cup (BC)$ .

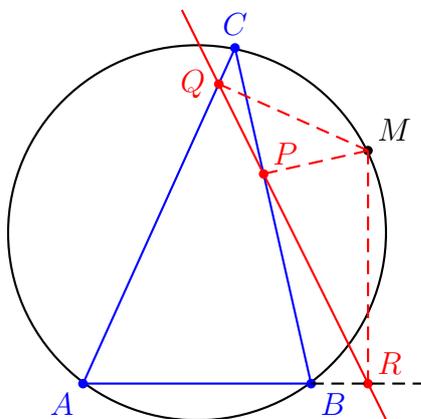
$$P, Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow (\vec{PQ}, \vec{PR}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow (\vec{PQ}, \vec{PM}) = (\vec{PR}, \vec{PM}) [\pi].$$

Maintenant, puisque les triangles  $MPC$  et  $MQC$  sont rectangles en  $P$  et  $Q$  respectivement, les points  $P$  et  $Q$  sont sur le cercle de diamètre  $[MC]$ . On en déduit que  $(\vec{PQ}, \vec{PM}) = (\vec{CQ}, \vec{CM}) [\pi]$ . De même,  $(\vec{PR}, \vec{PM}) = (\vec{BR}, \vec{BM}) [\pi]$ . Par suite,

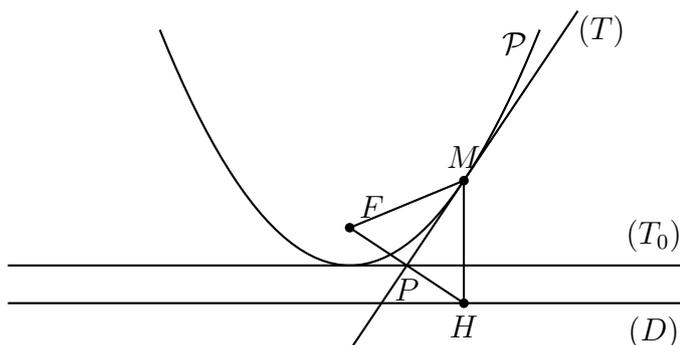
$$\begin{aligned} P, Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow (\vec{CQ}, \vec{CM}) = (\vec{BR}, \vec{BM}) [\pi] \\ &\Leftrightarrow (\vec{CA}, \vec{CM}) = (\vec{BA}, \vec{BM}) [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A, B \text{ et } C). \end{aligned}$$

**2ème cas.** Supposons par exemple que  $M \in (AB)$ . Dans ce cas,  $M = R$ . Si de plus  $M$  n'est ni  $A$ , ni  $B$ , alors  $M \neq P$  et  $M \neq Q$  puis les droites  $(MP)$  et  $(MQ)$  sont perpendiculaires aux droites  $(BC)$  et  $(AC)$  respectivement. Si par l'absurde, les points  $P, Q$  et  $R$  sont alignés, on a  $(MP) = (MQ)$  et donc  $(AB) // (AC)$ . Ceci est une contradiction. Donc, si les points  $P, Q$  et  $R$  sont alignés,  $M$  est l'un des trois points  $A, B$  ou  $C$ . La réciproque est immédiate. En résumant les deux cas,

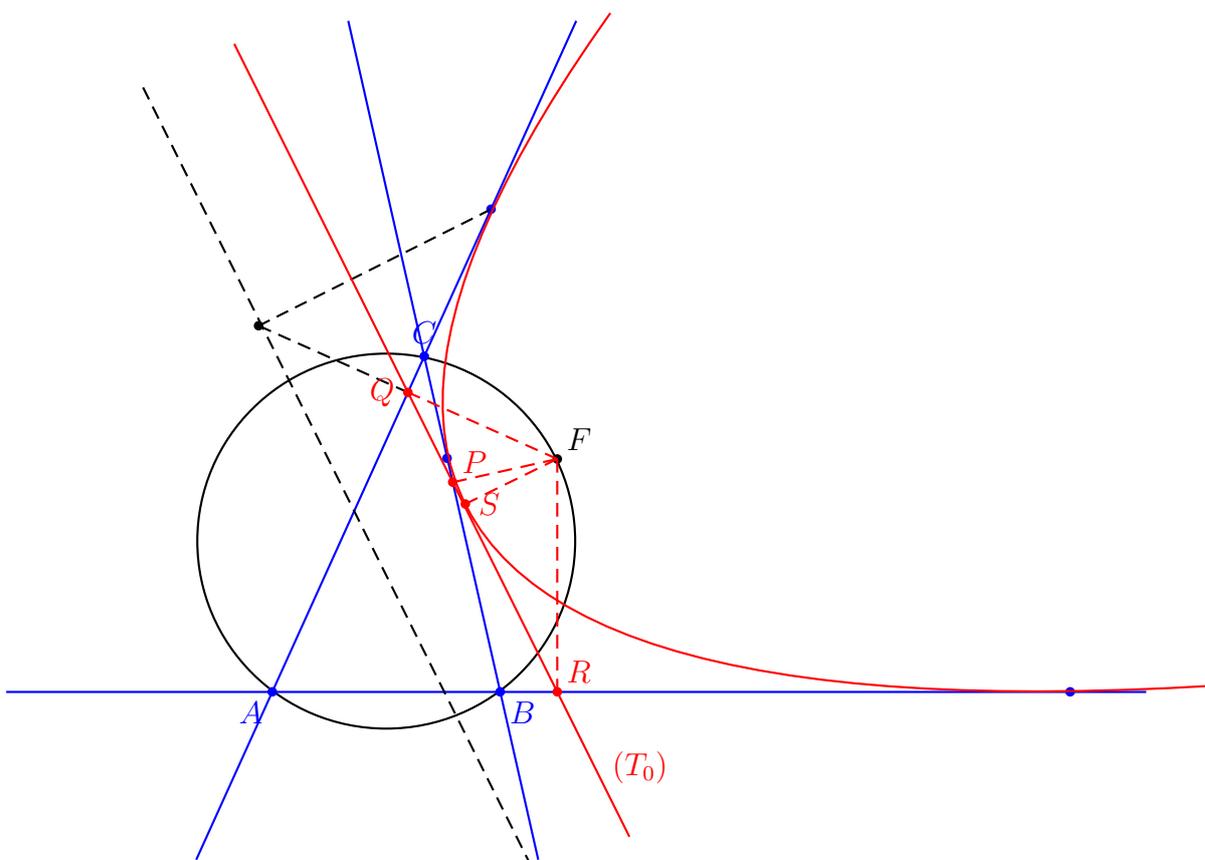
$P, Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si  $M$  est sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .



2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle  $FMH$  est isocèle en  $M$  et la tangente en  $M$  à  $\mathcal{P}$  est la médiatrice du segment  $[FH]$ . Par suite, le projeté orthogonal  $P$  de  $F$  sur la tangente  $(T)$  est sur  $5T_0$  la tangente au sommet de la parabole  $\mathcal{P}$ .



Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés. Si  $\mathcal{P}$  est une parabole tangente aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$ , les projetés orthogonaux  $P, Q$  et  $R$  de son foyer  $F$  sur les droites  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole  $\mathcal{P}$ . D'après 1), le point  $F$  est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Réciproquement, si  $F$  est l'un des trois points  $A, B$  ou  $C$ ,  $F$  n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer. Soit donc  $F$  un point du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et distinct des points  $A, B$  et  $C$ . Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer  $F$ , tangente aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$ . On construit les projetés orthogonaux  $P, Q$  et  $R$  de  $F$  sur les droites  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$ . Ils sont alignés sur la droite de SIMSON  $(T_0)$  de  $F$  relativement au triangle  $ABC$ . La parabole de foyer  $F$  et de tangente au sommet  $(T_0)$  est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de  $F$  par rapport aux points  $P, Q$  et  $R$  (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à  $(T_0)$  jusqu'à la parabole.

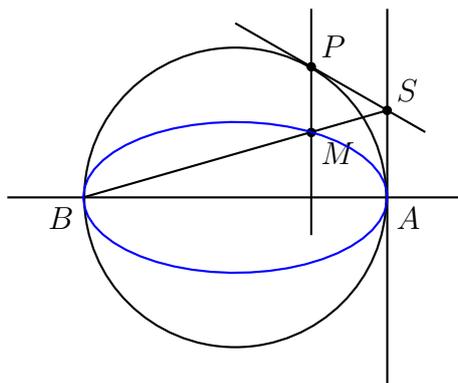


### Correction de l'exercice 8 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel  $A$  a pour coordonnées  $(R, 0)$  et  $(\mathcal{C})$  a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Soit  $P(R \cos t, R \sin t)$  un point de  $(\mathcal{C})$ . La tangente  $(D)$  à  $(\mathcal{C})$  en  $A$  est la droite d'équation  $x = R$  et la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  en  $P$  est la droite d'équation  $x \cos t + y \sin t = R$ . Quand  $t \notin \pi\mathbb{Z}$ ,  $(T)$  recoupe  $(D)$  en le point  $S$  de coordonnées  $(R, R \frac{1 - \cos t}{\sin t})$  ou encore  $(R, R \tan(\frac{t}{2}))$ . Une équation de la droite  $(BS)$  est  $-\tan(\frac{t}{2})(x + R) + 2y = 0$ . L'abscisse de  $M$  est  $R \cos t$  et donc

$$y_M = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{t}{2}\right) (x_M + R) = \frac{1}{2} R \tan\left(\frac{t}{2}\right) (\cos t + 1) = R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} R \sin t.$$

L'ensemble des points  $M$  est donc le support de l'arc  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = \frac{1}{2} R \sin t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . C'est l'image du cercle  $\mathcal{C}$  dans l'affinité de base  $(AB)$ , de direction  $(D)$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  et donc une ellipse de grand axe  $[AB]$ .



### Correction de l'exercice 9 ▲

On choisit un repère orthonormé  $\mathcal{R}_1 = (\mathcal{O}', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  tel que le plan d'équation  $x + y + z = 1$  dans  $\mathcal{R}$  soit le plan d'équation  $Z = 0$  dans  $\mathcal{R}_1$ . On prend  $\mathcal{O}' = (1, 0, 0)$  puis  $\vec{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\vec{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  et enfin  $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ . Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ensuite, soit  $M$  un point de l'espace dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  sont notées  $(x, y, z)$  et les coordonnées dans  $\mathcal{R}_1$  sont notées  $(X, Y, Z)$ .

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right) + 1 \\ Z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 1\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On travaille maintenant en dimension 2 et on note encore  $\mathcal{R}_1$  le repère  $(\mathcal{O}', \vec{I}, \vec{J})$ . Une équation de  $(\Gamma)$  dans

$$\mathcal{R}_1 \text{ est } \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \text{ ou encore } \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0. \text{ On pose } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2} \\ y' = -\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2} \end{cases}$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2} \\ Y = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \end{cases} \text{ et on note } \mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{i}', \vec{j}') \text{ le nouveau repère défini par ces formules.}$$

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}} \left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{7x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

$(\Gamma)$  est une parabole de paramètre  $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$ . Éléments de  $(\Gamma)$  dans  $\mathcal{R}'$  : sommet  $S\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}'}$ , axe :  $x' = -\frac{21}{4\sqrt{6}}$ , foyer  $F\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}'}$ , directrice :  $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Éléments de  $(\Gamma)$  dans  $\mathcal{R}_1$  en repassant à trois coordonnées : sommet  $S\left(-\frac{41}{16\sqrt{2}}, -\frac{45}{16\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathcal{R}_1}$ , axe :  $\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = -\frac{21}{2\sqrt{6}} \\ Z = 0 \end{cases}$ , foyer  $F\left(-\frac{11}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathcal{R}_1}$ , directrice :

$$\begin{cases} -X + \sqrt{3}Y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z = 0 \end{cases} . \text{Eléments de } (\Gamma) \text{ dans } \mathcal{R} : \text{sommet } S\left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)_{\mathcal{R}}, \text{axe : } \begin{cases} 8x - 4y - 4z + 21 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} ,$$

$$\text{foyer } F\left(-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, 10\right)_{\mathcal{R}}, \text{directrice : } \begin{cases} 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} .$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

Soit  $\mathcal{H}$  une hyperbole. Il existe un repère orthonormé dans lequel  $\mathcal{H}$  admet une équation catésienne de la forme  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ). Dans ce repère, les asymptotes ont pour équations  $y = \frac{b}{a}x$  et  $y = -\frac{b}{a}x$ . Elles sont perpendiculaires si et seulement si  $\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = -1$  ou encore si et seulement si  $a = b$ . L'excentricité de  $\mathcal{H}$  est alors

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut  $\sqrt{2}$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

Notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points considérés. Pour  $x$  réel, posons  $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ .

$$\begin{aligned} P(x) = P(y) &\Leftrightarrow (x^3 - y^3) + A(x^2 - y^2) + B(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)((x^2 + xy + y^2) + A(x + y) + B) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ ou } x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$  est donc la réunion de la droite d'équation  $y = x$  et de la courbe  $\mathcal{E}$  d'équation  $x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0$ . Pour déterminer la nature de  $\mathcal{E}$ , on fait un changement de repère orthonormé en posant

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X - Y)^2 + (X - Y)(X + Y) + (X + Y)^2) + \frac{A}{\sqrt{2}}X + B = 0 \\ &\Leftrightarrow 3X^2 + Y^2 + \sqrt{2}AX + 2B = 0 \Leftrightarrow 3\left(X + \frac{A\sqrt{2}}{6}\right)^2 + Y^2 = \frac{A^2 - 12B}{6} \quad (*) \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$  est une ellipse si et seulement si  $A^2 - 12B > 0$  (sinon  $\mathcal{E}$  est un point ou est vide). Dans ce cas, puisque  $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 = b$ ,

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

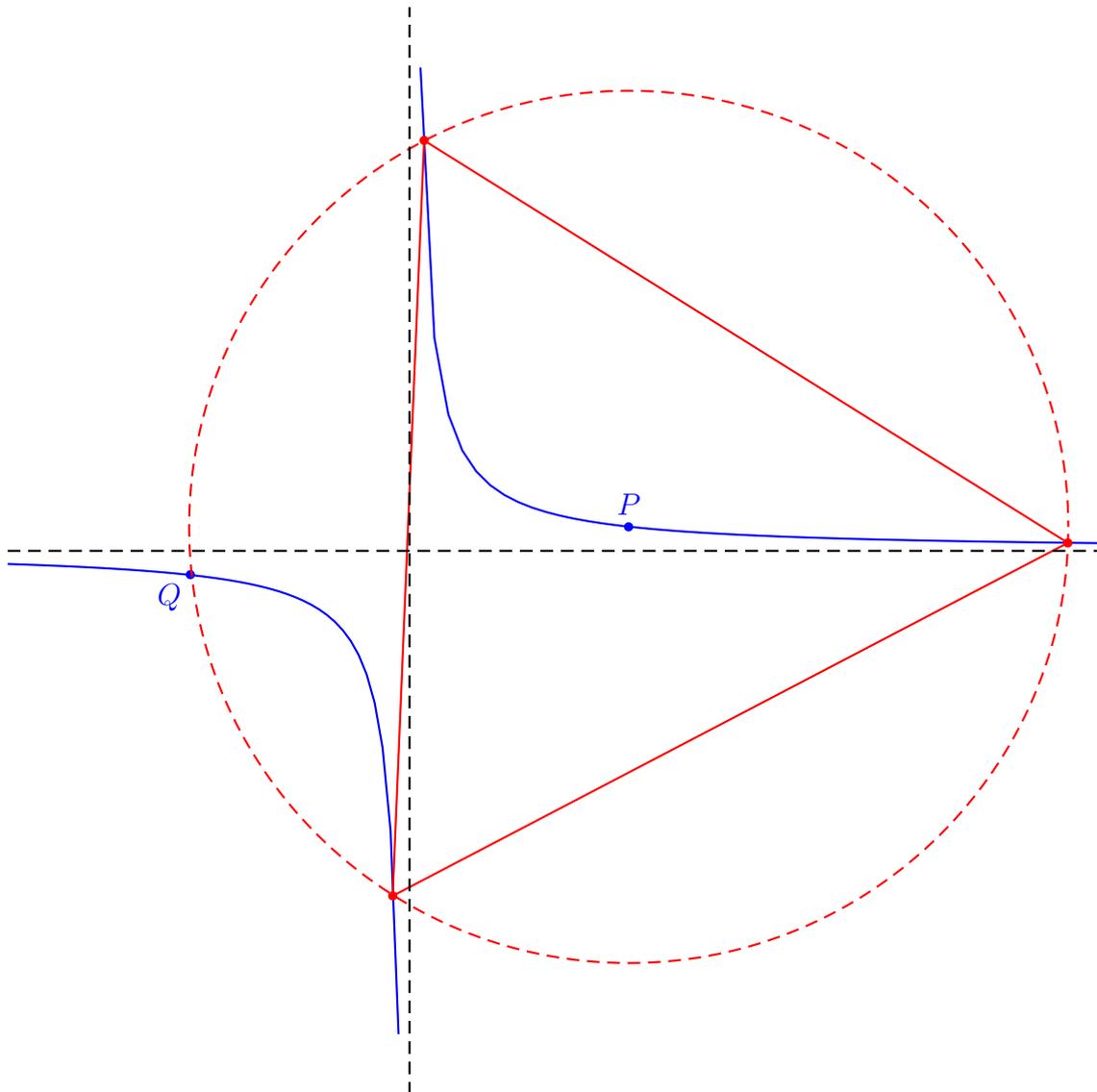
### Correction de l'exercice 12 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel  $P$  a pour coordonnées  $(a, b)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  et l'hyperbole  $\mathcal{H}$  a pour équation  $xy = ab$ . Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $P$  et de rayon  $PQ$  admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos t \\ y = b + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Soit donc } M\left(a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos t, b + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sin t\right) \text{ un point de } \mathcal{C}.$$

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow (a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos t)(b + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sin t) = ab \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2}(b \cos t + a \sin t) + 4(a^2 + b^2) \cos t \sin t = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t + \sin(2t) \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(2t) + \sin(t + t_0) = 0 \text{ où } \cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2t = -t - t_0 + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / 2t = \pi + t + t_0 + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / t = -\frac{t_0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / t = \pi + t_0 + 2k\pi.
\end{aligned}$$

$t = \pi + t_0 + 2k\pi$  fournit le point de coordonnées  $(-a, -b)$  c'est-à-dire le point  $Q$ . Sinon, on obtient trois autres points les points  $M(-\frac{t_0}{3})$ ,  $M(-\frac{t_0}{3} + \frac{2\pi}{3})$  et  $M(-\frac{t_0}{3} + \frac{4\pi}{3})$ . On note  $A, B$  et  $C$  ces trois points. Puisque ces trois points sont sur un cercle de centre  $P$  et que  $(\vec{PA}, \vec{PB}) = (\vec{PB}, \vec{PC}) = (\vec{PC}, \vec{PA}) = \frac{2\pi}{3}$ , le triangle  $ABC$  est équilatéral.



### Correction de l'exercice 13 ▲

On cherche l'équation d'une telle parabole  $\mathcal{P}$  sous la forme  $(ax + by)^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $a > 0$ .

$$(1,0) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a^2 + 2c + e = 0 \text{ et } (0,2) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 4b^2 + 4d + e = 0.$$

D'après la règle de dédoublement des termes, une équation cartésienne de la tangente à  $\mathcal{P}$  en  $(1,0)$  est  $a^2x + aby + c(x+1) + dy + e = 0$  ou encore  $(a^2 + c)x + (ab + d)y + c + e = 0$ . Cette tangente est l'axe  $(Ox)$  si et

$$a^2 + c = c + e = 0 \text{ et } ab + d \neq 0.$$

seulement si  $a^2 + c = c + e = 0$  et  $ab + d \neq 0$ . Une équation cartésienne de la tangente à  $\mathcal{P}$  en  $(0,2)$  est  $2abx + 2b^2y + cx + d(y+2) + e = 0$  ou encore  $(2ab + c)x + (2b^2 + d)y + 2d + e = 0$ . Cette tangente est l'axe

$$2b^2 + d = 2d + e = 0 \text{ et } 2ab + c \neq 0.$$

$(Oy)$  si et seulement si  $2b^2 + d = 2d + e = 0$  et  $2ab + c \neq 0$ . En résumé,  $\mathcal{P}$  est solution si et seulement si

$$\begin{cases} c = -a^2 \\ d = -2b^2 \\ e = a^2 = 4b^2 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ ab + d \neq 0 \\ 2ab + c \neq 0 \\ a > 0 \end{cases}.$$

Maintenant,  $(a^2 = 4b^2, a^2 + b^2 = 1 \text{ et } a > 0) \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$  et  $b = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Le cas  $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$  fournit  $d = -\frac{2}{5}$  puis  $ab + d = 0$  ce qui est exclu. Donc, nécessairement  $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$  et  $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  puis  $c = -\frac{4}{5}$ ,  $d = -\frac{2}{5}$  et  $e = \frac{4}{5}$  qui sont effectivement solution du système. On obtient ainsi une et une seule courbe du second degré solution, à savoir la courbe d'équation cartésienne

$$(2x - y)^2 - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Il reste à vérifier que cette courbe est effectivement une parabole. On pose  $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x - 2y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \end{cases}$  ou encore

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X - Y) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} (2x - y)^2 - 8x - 4y + 4 = 0 &\Leftrightarrow 5Y^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) - \frac{4}{\sqrt{5}}(-2X - Y) + 4 = 0 \Leftrightarrow 5Y^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}Y + \frac{16}{\sqrt{5}}X + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5\left(Y - \frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{16}{\sqrt{5}}\left(X + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$  est donc effectivement une parabole.

