Fonctions de plusieurs variables réelles

PC*2

20 mars 2008

Table des matières

Notations et conventions

- Les espaces $\mathbf{R}^n$ intervenant sont, pour le programme, de dimensions ≤ 3 mais le cas général n'impose aucun changement.
- Les espace $\mathbf{R}^n$ seront considérés, tantôt comme des espaces affines, tantôt comme des espaces vectoriels ce qui autorisera la notation $a+\overrightarrow{u}$ pour a et $\overrightarrow{u}$ dans $\mathbf{R}^n$. On rappelle que, si a et b sont des points de l'espace affine $\mathbf{R}^n$, le symbole $b-a$ représente le vecteur $\overrightarrow{ab} \in \mathbf{R}^n$.
- La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ *resp* $\mathbf{R}^p$ sera généralement notée
$$(\epsilon) = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, \ldots, \overrightarrow{\epsilon_n})$$
resp
$$(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$$
Le système des formes coordonnées de $\mathbf{R}^n$ dans la base (ϵ) sera noté $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$. Pour $\overrightarrow{x} \in \mathbf{R}^n$ il vient donc :
$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\overrightarrow{x})\overrightarrow{\epsilon_i}$$
- Les produits scalaires canoniques dont sont munis les espaces $\mathbf{R}^n$ seront toujours notés $(\quad|\quad)$, par exemple $\pi_i(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{\epsilon_i}|\overrightarrow{x})$.
- Les trois normes usuelles d'un espace $\mathbf{R}^n$ seront toujours notées $||\quad||_1$, $||\quad||_2$, $||\quad||_\infty$.
- Les lettres U, V, Ω désigneront toujours des ouverts d'espaces $\mathbf{R}^n$. Si $a \in U \subset \mathbf{R}^n$, on considèrera l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant $\overrightarrow{0}$ noté :
$$U_a = \{\overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^n \;/\; a + \overrightarrow{h} \in U\}$$

Chapitre 1

Calcul différentiel

1.1 Applications continûment différentiables

1.1.1 Dérivée suivant un vecteur

Proposition 1. *Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$. Si $a \in U$, et $\overrightarrow{h}$ est un vecteur non nul de $\mathbf{R}^p$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $a + t\overrightarrow{h} \in U$. On peut donc définir l'application $f_{\overrightarrow{h}}$: $]-\delta, \delta[\to U$ par :*

$$\boxed{t \in]-\delta, \delta[\mapsto f\left(a + t\overrightarrow{h}\right)}$$

Définition 1 (Dérivée en un point suivant un vecteur). Avec les hypothèses et les notations de la proposition 1, on dit que f admet une **dérivée au point a suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$** si la fonction $f_{\overrightarrow{h}}$ admet une dérivée en 0, laquelle ne dépend évidemment pas du réel δ, on la note :

$$\boxed{\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f(a) = f'_{\overrightarrow{h}}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(a + t\overrightarrow{h}\right) - f(a)}{t}}$$

Définition 2 (Dérivées partielles). Avec les hypothèses et les notations de la proposition 1, on dit que f admet une **dérivée partielle au point a suivant la variable d'indice j** si elle admet une dérivée au point a suivant le vecteur $\overrightarrow{e_j}$, laquelle est notée **provisoirement** :

$$\boxed{\mathrm{D_j} f(a) = \mathrm{D}_{\overrightarrow{e_j}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(a + t\overrightarrow{e_j}\right) - f(a)}{t}}$$

Remarque 1 (**Notation définitive)**. Si le point courant de l'ouvert U est noté $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, la dérivée précédente $\mathrm{D}_j f(a)$, au point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ se notera, de préférence :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h_j \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, \ldots, a_p) - f(a_1, \ldots, a_p)}{h_j}}$$

ou encore, pour abréger $\boxed{f'_{x_j}(a)}$.

Cette notation, **est bien meilleure pour les calculs** car, en physique, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ne sont pas anonymes comme en maths mais représentent des **grandeurs physiques qui ont une signification intrinsèque indépendamment des relations qui les lient**. Si z est la grandeur liée aux variables (x, y) par la relation $z = f(x, y)$, il sera facile de calculer la dimension de $\frac{\partial z}{\partial x}$. Cependant **si l'on n'a pas suffisamment réfléchi au sens des symboles cette notation peut s'avérer dangereuse**. Supposons, par exemple, que la fonction f aille de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et que le point courant de $\mathbf{R}^2$ soit noté (x, y). Dans la notation $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, **le symbole x du dénominateur n'a aucun rapport avec le point (x, y), il rappelle simplement que l'on dérive par rapport à la première variable** . Si bien que si l'on fait un changement de variables, par exemple en coordonnées polaires :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

il ne faut surtout pas écrire des absurdités du genre $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \rho \cos \theta}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ [1].

Proposition 2. *Soit $f : U \to \mathbf{R}^n$. Posons, pour $x \in U$ et $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:*

$$\boxed{f_i(x) = \pi_i \circ f(x) \quad \textit{de sorte que} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \overrightarrow{\epsilon_i} = (f_1(x), \ldots, f_n(x))}$$

alors f admet une dérivée au point $a \in U$ suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ si et seulement s'il en est de même des f_i et l'on a alors :

$$\boxed{\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f_i(a) \overrightarrow{\epsilon_i} = \big(\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f_1(a), \ldots, \mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f_n(a)\big)}$$

[1] Pas de mauvais esprit SVP

En particulier, f possède au point a une dérivée partielle par rapport à la variable d'indice j si et seulement si il en est de même des f_i et, dans ce cas :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\overrightarrow{\epsilon_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right)}$$

1.1.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert

Définition 3. Une application f d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ est dite **de classe $\mathcal{C}^1$ ou encore continûment différentiable sur** U si et seulement si elle admet en tout point $x \in U$ des dérivées partielles relativement à toutes les variables et que celles ci sont continues sur U. L'ensemble des applications $f : U \to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est noté $\mathcal{C}^1(U, \mathrm{R}^n)$.

Remarque 2. D'après la proposition 2 page 6 dont on conserve les hypothèses et les notations, l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si il en est de même des f_i. **Dans la suite, on pourra donc souvent, sans perte de généralité, se limiter au cas où l'espace d'arrivée est R**.

Théorème 1 (Premier théorème fondamental). *Munissons $\mathbf{R}^p$ d'une norme $|| \quad ||$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathrm{R}^n)$.*

1. *Si $a \in U$ notons ϕ_a la fonction ϵ_a définie sur $U_a - \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ par :*

$$\boxed{\epsilon_a\left(\overrightarrow{h}\right) = \frac{f\left(a + \overrightarrow{h}\right) - f(a) - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j}{||\overrightarrow{h}||}}$$

où $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2, \dots, h_p)$. Alors $\boxed{\lim_{\overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0}} \epsilon_a\left(\overrightarrow{h}\right) = \overrightarrow{0}}$. Cette propriété, qui ne dépend pas de la norme choisie, s'écrit encore :

$$\boxed{f\left(a + \overrightarrow{h}\right) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j + o\left(||\overrightarrow{h}||\right) \quad \text{quand } \overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0} \quad (1.1)}$$

où encore :

$$\boxed{f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,(x_j - a_j) + o\,(||x-a||) \quad quand \quad x \to a}.$$

En particulier f est continue en tout point de U.

2. *Pour tout point $a \in U$ et pour tout vecteur $\overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^p - \{\overrightarrow{0}\}$, la fonction f admet une dérivée au point a suivant le vecteur $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ donnée par :*

$$\boxed{\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f(a) \quad = \quad \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j \qquad (1.2)}$$

Démonstration. Les propriétés à prouver ne dépendent pas de la norme choisie. On travaillera avec la norme $|| \quad ||_\infty$.

Preuve du développement limité : soit $\epsilon > 0$, vu la continuité de toutes les dérivées partielles de f au point a, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout vecteur $\overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^p$ vérifiant $||\overrightarrow{h}|| < \delta$ on ait :

$$\boxed{\overrightarrow{h} \in U_a \ \text{ et } \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, p\} \qquad \left|\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \overrightarrow{h}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|\right| < \epsilon}$$

Considérons, pour $0 < ||\overrightarrow{h}|| < \delta$, $\overrightarrow{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$, la fonction $t \mapsto \overrightarrow{\phi_j(t)} : [0,1] \to \mathbf{R}^p$ définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{\phi_j(t)} = (h_1, h_2, \ldots, t\, h_j, 0, 0, \ldots, 0)}$$

De sorte que :

$$\boxed{f\left(a + \overrightarrow{h}\right) - f(a) = \sum_{j=1}^{p} f\left(a + \overrightarrow{\phi_j(1)}\right) - f\left(a + \overrightarrow{\phi_j(0)}\right)}$$

et, en posant :

$$\boxed{\Delta_j\left(\overrightarrow{h}\right) = \frac{f\left(a + \overrightarrow{\phi_j(1)}\right) - f\left(a + \overrightarrow{\phi_j(0)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j}{||\overrightarrow{h}||},}$$

il vient :

$$\boxed{\frac{f\left(a+\overrightarrow{h}\right)-f(a)-\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,h_j}{||\overrightarrow{h}||} \quad = \quad \sum_{j=1}^{p}\Delta_j\left(\overrightarrow{h}\right) \quad (1.3)}$$

Comme la fonction $t \in [0,1] \mapsto f\left(a+\overrightarrow{\phi_j(t)}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\overrightarrow{\phi_j(t)}\right)\,h_j$:

$$\Delta_j\left(\overrightarrow{h}\right) = \frac{1}{||\overrightarrow{h}||}\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\overrightarrow{\phi_j(t)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right]\,h_j\,\mathrm{d}t$$

$$\left|\left|\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\overrightarrow{\phi_j(t)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right]\,\mathrm{d}t\right|\right| \leq \int_0^1 \left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\overrightarrow{\phi_j(t)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|\right|\,\mathrm{d}t$$

et, comme pour tout $t \in [0,1]$, $||t\overrightarrow{h_j}|| \leq ||\overrightarrow{h}|| < \delta$, il vient donc :

$$\boxed{\left|\left|\Delta_j\left(\overrightarrow{h}\right)\right|\right| \leq \frac{\epsilon\,|h_j|}{||\overrightarrow{h}||} \leq \epsilon}$$

et le résultat d'après la relation (1.3).

Preuve de la dérivabilité suivant toute direction : Soit $\overrightarrow{h} \neq \overrightarrow{0}$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $t \in]-\eta,\eta[= I$, $t\,\overrightarrow{h} \in U_a$ et, d'après (1.1) page 7 , une fonction $\epsilon_a : U_a \to \mathbf{R}^n$, tendant vers $\overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{h}$ telle que :

$$\boxed{\forall t \in I,\ f\left(a+t\,\overrightarrow{h}\right) = f(a) + \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)t\,h_j + ||t\,\overrightarrow{h}||\,\epsilon_a\left(t\,\overrightarrow{h}\right)}$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{f\,(a+t\overrightarrow{e_j})-f(a)}{t} = \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j}$$

□

Différentielle

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathrm{R}^n)$, si $a \in U$, l'application, notée $\mathrm{d}\, f(a) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$, définie par :

$$\boxed{\forall \overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^p,\ \mathrm{d}\, f(a)\left(\overrightarrow{h}\right) = \mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} f(a)}$$

est linéaire ; elle s'appelle **différentielle de f au point** a.

Afin de ne pas surcharger les expressions, on convient de noter :

$$\boxed{\mathrm{d}\, f(a)\left(\overrightarrow{h}\right) = \mathrm{d}\, f(a).\overrightarrow{h}}$$

Il vient donc, pour tout vecteur $\overrightarrow{h} = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbf{R}^p$:

$$\boxed{\mathrm{d}\, f(a).\overrightarrow{h} \quad = \quad \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_j \qquad (1.4)}$$

Le développement limité (1.1) page 7 prend alors la forme :

$$\boxed{f\left(a + \overrightarrow{h}\right) \quad = \quad f(a) + \mathrm{d}\, f(a).\overrightarrow{h} + o\left(||\overrightarrow{h}||\right) \quad \text{quand } \overrightarrow{h} \to \overrightarrow{0} \qquad (1.5)}$$

Théorème 2 (Deuxième théorème fondamental). *Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathrm{R}^n)$ et $t \mapsto m(t)$ un* **arc paramétré $\mathcal{C}^1$ tracé dans** *U c'est-à-dire une application m de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$ telle que $m(I) \subset U$; alors l'application $\phi : I \to \mathbf{R}^n$ définie par :*

$$t \mapsto f(m(t))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in I$:

$$\boxed{\phi'(t) \quad = \quad \mathrm{d}\, f(m(t)).\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}t}(t) \qquad (1.6)}$$

Démonstration. Soit $a = m(t)$, on écrit le développement limité (1.5) de f au point a sous la forme :

$$f\left(a + \overrightarrow{h}\right) = f(a) + \mathrm{d}\, f(a).\overrightarrow{h} + o\left(||\overrightarrow{h}||\right)$$

donc, si $\Delta t \neq 0$ est un réel tel que $t + \Delta t \in I$, il vient en posant $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{m(t)m(t+\Delta t)}$:

$$f\left(m(t+\Delta t)\right) = f(a) + \mathrm{d}\, f(a).\overrightarrow{m(t)m(t+\Delta t)} + o\left(||\overrightarrow{m(t)m(t+\Delta t)}||\right)$$

donc :

$$\boxed{\frac{\phi(t+\Delta t)-\phi(t)}{\Delta t} = \mathrm{d}\, f(m(t)).\frac{\overrightarrow{m(t)m(t+\Delta t)}}{\Delta t} + o\left(\frac{||\overrightarrow{m(t)m(t+\Delta t)}||}{\Delta t}\right)}$$

d'où le résultat en faisant tendre Δt vers 0 puisque $\mathrm{d}\, f(a)$ est une application linéaire donc continue en dimension finie. □

Remarque 3 *(Interprétation géométrique).* Avec les hypothèses et notations du théorème 2, si l'arc $(\gamma) : t \mapsto m(t)$ est régulier et si $\mathrm{d}\, f(x)$ est injective au point $x = m(t)$, **un vecteur tangent au point** $f(x)$ **à l'arc paramétré** (Γ) **:** $t \mapsto f\left(m(t)\right)$ **est l'image par** $\mathrm{d}\, f(x)$ **d'un vecteur tangent à** (γ) **au point** $m(t)$. On exprime cette propriété en disant que **la différentielle conserve le contact**.

Notation différentielle

Proposition 3. *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^p$. Pour $1 \leq j \leq p$, soit $p_j : U \to \mathbf{R}$ la forme coordonnée définie par $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \mapsto x_j$. L'application p_j est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et sa différentielle, en tout point $x \in U$ est donnée par :*

$$\mathrm{d}\, p_j(x) = p_j$$

Si le point courant de U **est noté** x, *cette différentielle sera notée* $\mathrm{d}x_j$, *de sorte que :*

$$\boxed{\forall \overrightarrow{h} = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbf{R}^p,\ \mathrm{d}x_j\left(\overrightarrow{h}\right) = h_j}$$

Donc, si $f \in \mathcal{C}^1\left(U, \mathrm{R}^n\right)$, la formule (1.4) page 10 pourra se récrire sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{d}\, f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, \mathrm{d}x_j}$$

Remarque 4. De même, si le point courant de U est noté x, la différentielle de l'identité : $x \mapsto x$ est notée $\mathrm{d}x$. C'est l'identité : $\overrightarrow{h} \mapsto \overrightarrow{h}$, *cf* la proposition 4 page 12 pour une généralisation.

Opérations algébriques sur les applications continûment différentiables

Proposition 4 (Différentielle d'une application linéaire). *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^p$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^p$:*

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f}$$

Proposition 5 (Passage aux coordonnées à l'arrivée). *Soit f une application de classe d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ donnée sous la forme :*

$$x \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

où $f_i = \pi_i \circ f : U \to \mathbf{R}$. La proposition 2 assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si il en est de même des f_i et qu'alors, pour tout $x \in U$ et pour tout $\overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^p$, on a :

$$\mathrm{d}f(x).\overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(x).\overrightarrow{h} \\ \mathrm{d}f_2(x).\overrightarrow{h} \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_n(x).\overrightarrow{h} \end{pmatrix}$$

Proposition 6 (Somme).

Proposition 7 (Effet d'une application bilinéaire).

Proposition 8 (Quotient).

Composition des applications continûment différentiables

Lemme 1. *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$. On suppose que $\boxed{f(U) \subset V}$. Alors l'application composée $\phi = g \circ f : U \to \mathbf{R}^m$ admet, en tout point $a \in U$, une dérivée suivant tout vecteur $\overrightarrow{h}$ donnée par :*

$$\boxed{\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} g \circ f(a) \quad = \quad \mathrm{d}\, g\,(f(a))\,.\left[\mathrm{d}\, f(a).\,\overrightarrow{h}\right] \qquad (1.7)}$$

Démonstration. Soit $\overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^p$, considèrons $\delta > 0$ tel que $a + t\,\overrightarrow{h} \in U$ pour $|t| < \delta$. Soit $I =]-\delta, \delta[$. L'arc paramétré m défini sur I par :

$$m(t) = f\left(a + t\,\overrightarrow{h}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème 2 page 10 appliqué à l'arc $t \mapsto a + t\,\overrightarrow{h}$ et à la fonction f et il vient, pour $t \in I$:

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathrm{d}\, f(a + t\,\overrightarrow{h}).\,\overrightarrow{h}$$

Appliquons à nouveau le théorème 2 page 10 à l'arc $t \mapsto m(t)$, tracé dans V et à la fonction g. L'arc : $t \mapsto g\,(m(t)) = g \circ f\left(a + t\,\overrightarrow{h}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée au point $t \in I$ vaut :

$$\mathrm{d}\, g\,(m(t))\,.\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathrm{d}\, g\,(m(t))\,.\left[\mathrm{d}\, f(a + t\,\overrightarrow{h}).\,\overrightarrow{h}\right]$$

En particulier, pour $t = 0$, on trouve que $g \circ f$ est dérivable au point a suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ et :

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{h}} g \circ f(a) = \mathrm{d}\, g\,(f(a))\,.\left[\mathrm{d}\, f(a).\,\overrightarrow{h}\right] = \mathrm{d}\, g\,(f(a)) \circ \mathrm{d}\, f(a).\,\overrightarrow{h}$$

□

Corollaire 1 (Dérivées partielles d'une application composée). *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$. On suppose que $\boxed{f(U) \subset V}$. Alors, pour tout point $a \in U$, l'application composée $\phi = g \circ f : U \to \mathbf{R}^m$ admet des dérivées partielles relativement à toutes les variables et, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$:*

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(a) \quad = \quad \mathrm{d}g\,(f(a))\,.\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right] \quad (1.8)}$$

Ce qui, en notant $f_i(x) = \pi_i\,(f(x))$ pour $1 \leq i \leq n$, s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(a) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\,(f(a))\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad (1.9)}$$

Démonstration. Les hypothèses du théorème 1 page 13 sont satisfaites. La fonction ϕ admet donc une dérivée au point a dans la direction de $\overrightarrow{e_j}$ et la formule (1.7) page 13 avec $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{e_j}$ se récrit dans ce cas sous la forme (1.8) ou encore (1.9) *via* la relation, valable pour tout $\overrightarrow{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{R}^n$:

$$\mathrm{d}g\,(f(a))\,.\overrightarrow{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\,(f(a))\;k_i$$

□

Théorème 3. *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$. On suppose que $\boxed{f(U) \subset V}$. Alors l'application composée $\phi = g \circ f : U \to \mathbf{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et, pour tout point $a \in U$:*

$$\boxed{\mathrm{d}\,g \circ f(a) = \mathrm{d}\,g\,(f(a)) \circ \mathrm{d}\,f(a) \qquad (1.10)}$$

Démonstration. D'après le corollaire 1, dont les hypothèses sont ici vérifiées, ϕ admet en tout point $x \in U$ une dérivée partielle relativement à x_j donnée par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\,(f(x))\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

L'application $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ est donc continue sur U en vertu des théorèmes opératoires usuels. ϕ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et, d'après la formule 1.7 page 13 :

$$\mathrm{d}\,\phi(a).\overrightarrow{h} = \mathrm{D}_{\overrightarrow{h}}\phi(a) = \mathrm{d}\,g\,(f(a)) \circ \mathrm{d}\,f(a).\overrightarrow{h}$$

□

Exemple 1 (Application). Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et $f : I \times J \to \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $I \times J$. Alors l'application F de $J \times J \times I$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$F(x, y, z) = \int_y^z f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $J \times J \times I$. En particulier, si u et v sont deux applications $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans J alors la fonction g, définie sur I par :

$$g(x) = F\left(x, u(x), v(x)\right) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour $x \in I$:

$$g'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t + f\left(x, v(x)\right)\, v'(x) - f\left(x, u(x)\right)\, u'(x)$$

Matrice jacobienne

Exemple 2. Nature géométrique de la différentielle d'une inversion. Conservation des angles, matrice jacobienne, Jacobien.

1.1.3 Gradient d'une fonction à valeurs scalaires

Définition 5. L'espace $\mathbf{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\ \ |\ \ )$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$. Si $a \in U$ la différentielle de f au point a est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^p$. Il existe donc un et un seul vecteur noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(a)$ tel que :

$$\boxed{\forall \overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^p,\ \mathrm{d}\, f(a).\overrightarrow{h} \quad = \quad (\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(a) | \overrightarrow{h}\,) \quad (1.11)}$$

Si le point courant de l'ouvert U **est noté** x, la différentielle de l'application de U dans $\mathbf{R}^p$ définie par $x \mapsto x$ est l'identité en tout point. Elle est noté $\mathrm{d}\,\overrightarrow{x} : \overrightarrow{h} \mapsto \overrightarrow{h}$. De sorte qu'on peut convenir d'écrire la relation (1.11) sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{d}\, f(a) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(a) |\, \mathrm{d}\,\overrightarrow{x}\,)}$$

Proposition 9. *Si $t \mapsto m(t)$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans U, la dérivée au point $t \in I$ de l'application ϕ : $t \mapsto f(m(t))$ au point $t \in I$ est donnée par :*

$$\boxed{\phi'(t) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(m(t)) | \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}t}\right) \qquad (1.12)}$$

Remarque 5. Si, en outre, $t \mapsto f(m(t))$ est constante et $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}t}$ ne s'annule pas sur I, c'est-à-dire que l'arc paramétré régulier $t \mapsto m(t)$ est tracé sur une surface de niveau de la fonction f alors la tangente à cet arc au point $m(t)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(m(t))$. Ce résultat est bien connu en physique : **les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ** *(cf le chapitre sur les surfaces implicites).*

Exemple 3 (Propriétés des tangentes aux coniques).

Proposition 10 (Cordonnées du gradient dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$). *Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ alors, pour $x \in U$:*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \overrightarrow{e_j}}$$

Proposition 11 (Opérations algébriques). *Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbf{R}$. Alors $f + g$, $f\,g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et, pour $x \in U$:*

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}\,(f+g)}\,(x) = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(x) + \overrightarrow{\mathrm{grad}\, g}\,(x)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f\, g}\,(x) = g(x)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(x) + f(x)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\, g}\,(x)}$$

Si g ne s'annule pas sur U, $f/g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ et :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}\, \frac{f}{g}}\,(x) = \frac{g(x)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}\,(x) - f(x)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\, g}\,(x)}{g(x)^2}}$$

Démonstration. Même preuve que dans la section 1.1.2. □

Exemple 4 (Le gradient en coordonnées polaires). Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ qui ne contient pas $O = (0,0)$. Notons $m : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application de passage aux coordonnées polaires :

$$(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Alors $U^* = m^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$, on définit $f^* : U^* \to \mathbf{R}$ par :

$$f^* = f \circ m \; : \; (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Alors, $f^* \in \mathcal{C}^1(U^*, \mathbf{R})$ et, pour $(r, \theta) \in U^*$:

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\,(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial f^*}{\partial r}(r, \theta)\,\overrightarrow{u(\theta)} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f*}{\partial \theta}(r, \theta)\,\overrightarrow{v(\theta)}}$$

Où $\left(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}\right)$ est la base locale d'angle polaire θ.

Démonstration. La méthode est celle de la physique. Soit $(r_0, \theta_0) \in U^*$. On peut trouver $\alpha > 0$ tel que $D =]r_0 - \alpha, r_0 + \alpha[\times]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[\subset U^*$. Fixons $\theta \in]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[$ et appliquons la formule (1.12) page 16 à la fonction ϕ d'une variable définie sur $]r_0 - \alpha, r_0 + \alpha[$ par :

$$r \mapsto f\,(m(r, \theta)) = f^*(r, \theta)$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Il vient :

$$\boxed{\frac{\partial f^*}{\partial r}(r, \theta) = \phi'(r) = \left(\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\,(m(r, \theta)) | \frac{\partial m}{\partial r}(r, \theta)\right) = \left(\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\,(m(r, \theta)) | \overrightarrow{u(\theta)}\right)}$$

D'où la composante de $\overrightarrow{\operatorname{grad} f}\,(m(r, \theta))$ suivant $\overrightarrow{u(\theta)}$. Les lecteurs feront de même pour $\overrightarrow{v(\theta)}$. □

1.1.4 Exercices

Exercice 1. Montrer que $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2. Donner un exemple d'application ayant une dérivée suivant tout vecteur en un point mais discontinue en ce point.

Exercice 3. Soit $p > 0$ un entier. On définit une application f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par $f(0,0) = 0$ et sinon :

$$f(x,y) = (x+y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

f est-elle continue ? Admet-elle des dérivées partielles ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4. Étude au voisinage de $(0,0)$ de :

$$f(x,y) = \frac{x \sin x + y \sin y}{x^2+y^2}$$

Exercice 5 (Cen 99). Domaine de définition D de :

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2} \ ?$$

f est-elle continue sur D ? Sur quel ouvert est-elle $\mathcal{C}^1$?

Exercice 6. On pose :

$$f(x,y) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$$

Étudier la définition et la continuité de f. Sur quel ouvert Ω f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Calculer $\mathrm{d}f$ et interpréter le résultat.

Exercice 7. (X) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ telle qu'en tout point $x \in \mathbf{R}^n$, $Jf(x)$ soit antisymétrique.

1. Montrer que, pour tout couple $(x, \overrightarrow{h}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, on a :

$$(\overrightarrow{h} | f(x+\overrightarrow{h}) - f(x)) = 0.$$

2. On suppose $f(0) = 0$. Prouver que $(f(x)|x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ puis que, pour tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ on a $(f(x)|y) + (f(y)|x) = 0$.
3. On revient au cas général. Montrer l'existence d'une matrice antisymétrique A et d'une constante B tel que, pour tout x on ait $f(x) = Ax+B$.

1.2 Inversion globale

1.2.1 Difféomorphismes $\mathcal{C}^1$

Théorème 4 (Théorème d'inversion globale).

Exemple 5.

Montrer que les relations :

$$x = \cos u \operatorname{ch} v \text{ et } y = \sin u \operatorname{sh} v$$

déterminent deux applications $u(x, y)$ et $v(x, y)$ $\mathcal{C}^\infty$ de

$$\Omega = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*) \cup (]1, +\infty[\times\{0\})$$

dans $]-\pi, \pi[\times]0, +\infty[$ *(utiliser la définition bifocale de l'ellipse).* Montrer que u et v sont harmoniques.

Exemple 6. On note $(\sigma_i)_{1\leq i\leq 3}$ les fonctions élémentaires de x, y, z. Formaliser le calcul de ce que les physiciens notent :

$$\left(\frac{\partial\sigma_3}{\partial\sigma_2}\right)_{\sigma_1} \qquad \text{avec} \qquad S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

1.2.2 Changement de variables dans les intégrales multiples

On énonce le théorème pour $n = 3$.

Théorème 5 (Théorème général de changement de variable).

Exemple 7. Le domaine D est défini par :

$$\begin{cases} x, y, z & \geq & 0 \\ x + y + z & \leq & 1 \end{cases}$$

Calculer

$$\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^3}$$

à l'aide du changement de variable :

$$\begin{cases} X & = & x \\ Y & = & y \\ Z & = & x + y + z \end{cases}$$

1.2.3 Exercices

Exercice 8. Soit U l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \in U \Leftrightarrow x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

Pour $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in U$, on note $f(x) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$ le n-uplet des fonctions symétriques élémentaires de x. Montrer que $f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. On suppose que, pour tout point $a \in U$, $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{S}^{++}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que $f(U)$ est ouvert et que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 10 (Mines). Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|f'(t)| \leq k < 1$. Soit $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par :

$$\phi(x, y) = (y + f(x), x + f(y))$$

Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur lui même.

1.3 Dérivées d'ordre supérieur

1.3.1 Classe $\mathcal{C}^2$ et théorème de Schwarz

Définition 6. Une application f d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que toutes ses dérivées partielles. Pour i et j appartenant à $[|1, p|]$, on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

qui sont donc des applications continues de U dans $\mathbf{R}^n$.

Théorème 6 (Schwarz). *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ alors, pour tout couple $(i, j) \in [|1, p|]^2$:*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}$$

Exemple 8 (Calcul du Laplacien en polaires). Si f est une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ dans un ouvert $U \subset \mathbf{R}^2$ ne contenant pas $(0,0)$. On pose :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \text{ pour } (x,y) \in U.$$

On définit l'ouvert U^* de $\mathbf{R}^2$ par :

$$U^* = \{(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^2 \ / \ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in U\}.$$

Si l'on pose, pour $(\rho,\theta) \in U^*$:

$$f^*(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

alors, pour $(\rho,\theta) \in U^*$, on a :

$$(\Delta f)^*(\rho,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} f^*(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} f^*(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f^*(\rho,\theta)$$

1.3.2 Exercices

Exercice 11 (Centrale 99). Soit f la fonction continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R},\ f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

1. f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbf{R}^2$?
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$?
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 12 (Cen 99 et Mines 2000). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On pose

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Étudier la continuité de ϕ. Que dire de la régularité de ϕ si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 13 (Cen 98). Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et admet des dérivées secondes partielles croisées distinctes en $(0,0)$.

Exercice 14 (Ens 99). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$.

1. Que vaut
$$\iint_{D(O,R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{dy}$$
en coordonnées polaires ?
2. On suppose que $\Delta f = 0$. Montrer que la fonction g définie par :
$$g(\rho) = \int_0^{2\pi} f^*(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
est égale à une constante que l'on déterminera.
3. Sous ces mêmes hypothèses, prouver que :
$$\iint_{D(O,R)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{dy} = \pi R^2 f(0,0)$$
4. Que dire de f si elle admet un maximum atteint en $(0,0)$?

Exercice 15. (X) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ telle qu'en tout point $x \in \mathbf{R}^n$, $Jf(x)$ soit symétrique. Montrer l'existence de $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, g}\,(x) = f(x)$.

1.3.3 Classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$

Définition 7. Dérivées successives

Exercice 16. Montrer que $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin(xy)}{\operatorname{sh} y}$ convenablement prolongée en 0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$.

1.4 Équations aux dérivées partielles

Exemple 9. Polynômes homogènes harmoniques.

Exemple 10. Déterminer les applications homogènes f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U =]0, +\infty[\times \mathbf{R}$ telles que

$$\Delta f = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

On utilisera les coordonnées polaires.

Exemple 11 (Centrale 2001). Intégrer :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur des ouverts convenables. *(poser $u = x\, y$, $v = \frac{x}{y}$).*

Exemple 12 (Relèvement de fonctions angulaires). Soit $\Omega = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $\theta : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 2 \arctan\left(\dfrac{y}{x + r(x,y)}\right) & \text{si } (x,y) \notin]-\infty, 0[\times \{0\} \\ \pi & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, 2π-périodique, on note $\tilde{h}$ la fonction $h \circ \theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

1. Calculer $r \cos\theta$, $r \sin\theta$.
2. Montrer que $\tilde{h}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
3. Résoudre sur Ω :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

1.4.1 Exercices

Exercice 17 (Int 2006). $U =]0, +\infty[\times \mathbf{R}$. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ telles que, pour tout $(x,y) \in U$ on ait :

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

Exercice 18 (Mines 2006). Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ stable par toute homothétie de centre 0 et de rapport strictement positif[2] et $a \in \mathbf{R}$. Montrer l'équivalence entre les assertions sui-

[2] un tel ouvert est dit étoilé par rapport à 0

vantes :

i) Pour tout $x \in U - \{0\}$ et pour tout $m \in]0,1[$, $f(mx) = m^a\, f(x)$.

ii) Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a\, f(x)$$

Exercice 19 (Mines 99, Cen 2001). Intégrer :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

sur un ouvert convenable. *(poser $u = x + y$ et $v = x - y$)*

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]-1,1[, \mathbf{R})$. On pose :

$$g(x,y) = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

Trouver f pour que $\Delta g = 0$.

Exercice 21. Intégrer :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 22. Intégrer :

$$z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 = 0$$

Exercice 23 (Centrale 2001). Soit a réel fixé non nul, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on définit $F(x,y) = f\left(\dfrac{x^2 - a^2}{y} + y\right)$. Trouver les f tels que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}\times]0, +\infty[$, $\Delta F(x,y) = 0$.

Exercice 24 (Mines 2001). On note u l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(x,y) \mapsto x + y$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$; on pose $\phi = \psi \circ u$.

1. Exprimer $\partial_1\phi$, $\partial_2\phi$, $\partial_1\partial_2\phi$ en fonction de ψ.
2. En déduire les solutions "en $x+y$" de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_1\partial_2\phi = \frac{\partial_1\phi}{x+y}$$

Exercice 25 (Mines). Montrer que toute solution de l'équation :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(x^2+y^2)$$

est bornée sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 26 (Equation de la chaleur par la méthode des harmoniques). On se propose d'étudier la propagation de la chaleur dans un tuyau de longueur L. Il s'agit de déterminer les fonctions U de deux variables $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[$ satisfaisant aux conditions suivantes :

– U est continue sur $[0,L] \times [0,+\infty[$.

– U admet sur $[0,L] \times]0,+\infty[$ des dérivées partielles :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{\partial U}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Qui sont continues sur ce domaine et qui y vérifient la relation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{1.13}$$

– U satisfait les conditions aux limites :

$$U(0,t) = 0 \tag{1.14}$$
$$U(L,t) = 0 \tag{1.15}$$
$$U(x,0) = u_0(x) \tag{1.16}$$

Où u_0 est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,L]$ qui vérifie : $u_0(0) = u_0(L) = 0$.

1. Soient U_1 et U_2 deux solutions de ce problème. Posons $U = U_2 - U_1$ et :

$$G(t) = \int_0^L U^2(x,t)\,\mathrm{d}x \text{ pour } t \geq 0$$

Prouver que G est continue et décroissante. En déduire l'unicité d'une solution éventuelle.

2. Chercher les solutions stationnaires de ce problème, c'est à dire les fonctions U de la forme :
$$U(x,t) = f(x)g(t)$$
qui satisfont (1.13), (1.14), (1.15).
3. Montrer, en utilisant la théorie des séries de Fourier qu'il existe une solution de (1.13), (1.14), (1.15), (1.16) qui soit somme d'une série de solutions stationnaires. Conclure.

Exercice 27 (Représentation des fonctions harmoniques dans le disque). On recherche les fonctions f de deux variables, continues sur $D_F(O,1)$ (disque fermé du plan $\mathbf{R}^2$de centre O et de rayon 1), de classe $\mathcal{C}^2$ dans $D(O,1)$ et telles que :
$$\Delta f(x,y) = 0 \text{ dans } D(O,1)$$
et :
$$\forall \theta \in \mathbf{R},\ f(\cos\theta, \sin\theta) = u(\theta)$$
où $u \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

1. Montrer que, si une telle fonction f existe alors, pour tout $r \in [0,1[$:
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\phi)\,u(\phi)\,\mathrm{d}\phi = P_r * u(\theta)$$
Où P_r est *le noyau de Poisson* défini par :
$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$
2. Trouver toutes les solutions de ce problème.

1.5 Extrémums

1.5.1 Rappels sur la compacité

1.5.2 Recherche d'extrémums locaux

Proposition 12. *Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'au voisinage d'un point $a \in U$ f admet un développement limité de la forme :*
$$\boxed{f\left(a+\overrightarrow{h}\right) = f(a) + \left(\overrightarrow{h}|A\overrightarrow{h}\right) + ||\overrightarrow{h}||^2\epsilon_a\left(\overrightarrow{h}\right)}$$

où $\epsilon_a : U_a \to \mathbf{R}$ est une application qui tend vers 0 avec $\overrightarrow{h}$ et $A \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^p)$. Alors :

- *Si $A \in \mathcal{S}^{++}(\mathbf{R}^p)$ alors f présente un minimum local au point a.*
- *Si $-A \in \mathcal{S}^{++}(\mathbf{R}^p)$ alors f présente un maximum local au point a.*
- *Si A admet au moins deux valeurs propres non nulles de signes contraires alors, f ne présente aucun extrémum local au point A.*
- *Dans tous les autres cas on ne peut pas conclure. Il faut éventuellement pousser le développement.*

Remarque 6. Voir le théorème hors programme 7 pour plus de détails.

Exemple 13 (Mines). Recherche des extrémums locaux de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x$$

1.5.3 Recherche d'extrémums globaux

Exemple 14. Trouver le maximum de la fonction f définie sur $U =]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$$

Exemple 15. Extrema de $x^4+y^4-2(x-y)^2$ dans le disque fermé de centre O et de rayon 2.

Exemple 16 (X). Trouver les extrémums de la fonction f définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ par :

$$f(x,y) = \int_{-1}^{1} |(t-x)(y-t)| \,\mathrm{d}t$$

1.5.4 Exercices

Exercice 28 (Cen 98). Extréma locaux de f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2+y^2+x^3$$

Exercice 29. Extréma de $x^2 + 2y^2 - x$ sur le disque fermé unité.

Exercice 30 (Mines 2000). Points critiques et extréma de

$$x^3 + 3xy^2 - 12y - 15x$$

Exercice 31 (Mines 2000). Extrema de $2xy^2 + \ln(4 + y^2)$ sur $\mathbf{R}^2$ puis sur la bande $0 \leq x \leq 1$.

Exercice 32 (Ccp 2001). Soit f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x^2 - y)\,(3\,x^2 - y)$$

Montrer que la restriction de f à toute droite contenant O admet en O un minimum strict mais que f n'admet pas d'extrémum en O.

Exercice 33 (Mines). $f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$ admet des extrema globaux sur $\mathbf{R}^2$. Les calculer. sont-ils locaux stricts ?

Exercice 34. Extréma locaux de $f : (x, y) \mapsto x^3y^2(1 - x - y)$.

Exercice 35 (Centrale 2002). Extréma sur $\mathbf{R}^2$ de f :

$$(x, y) \mapsto x\,(x + y)\,(x - y - 1)$$

Exercice 36 (Centrale 1999). Soit f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2y^3(x + 2y - 2)$$

Donner les maxima locaux de f.
f possède-t-elle des maxima sur :

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ /\ x^2y^3 < 1\}$$

Exercice 37 (Mines 2001). Déterminer les bornes de la fonction :

$$(x, y) \mapsto x^2 - x + 2\,y^2,$$

sur le disque unité fermé de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 38 (Mines 2000). Soit $a > 0$. Montrer que l'application f de $]0, +\infty[^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2},$$

admet un minimum global et le calculer. Même question avec l'application f de $]0, +\infty[^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto \frac{a}{xy} + x^2 + y^2$$

Exercice 39 (Mines 2000). Extréma sur la boule unité fermée de $\mathbf{R}^3$ de :

$$(x, y, z) \mapsto x^3 - x^2 - y^2 - y - z^2 + 1$$

Exercice 40 (X 2006). Calculer :

$$\sup_{\substack{a,b,c>0 \\ a\leq b+c \\ b\leq a+c \\ c\leq a+b}} \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}$$

Exercice 41 (ENSL 2004). Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout x de $\mathbf{R}$, $f"(x) > 0$. On définit $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ par :

$$F(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$$

1. Montrer que si F admet un minimum local en (a, b, c) alors $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$.
2. F admet-elle un minimum global sur $\mathbf{R}^3$?
3. Étudier les extrémums globaux éventuels de F sur le plan P_m d'équation $x + y + z = m$.
4. Étudier le maximum de F sur $P_m \cap [0, 1]^3$.

Exercice 42 (X). Soit ABC un triangle d'un plan affine. On mène d'un point M intérieur à ce triangle les trois droites AM, BM, CM qui recoupent respectivement les côtés opposés en A', B', C'. Étudier le maximum du rapport :

$$\frac{\text{Aire}(A'B'C')}{\text{Aire}(ABC)}$$

lorsque le point M varie.

Exercice 43. Soit ABC un triangle de l'espace $\mathbf{R}^3$. Un point M se déplace dans un plan (P) parallèle au plan de ABC à la distance $h > 0$. Montrer que la surface latérale du tétraèdre $MABC$ est minimale si et seulement si la projection orthogonale de M sur le plan ABC est le centre du cercle inscrit au triangle ABC. En déduire, parmi les tétraèdres de volume donnés, ceux qui sont de surface minimale.

Exercice 44 (Fonctions harmoniques dans un disque). Soit U un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction continue de $\overline{D}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ dans U.

1. Prouver que, si $\Delta f > 0$ dans U, alors f atteint son maximum sur $\partial U = \bar{U} - U$.
2. Prouver que le résultat précédent est encore vrai si f est harmonique dans U *(considérer $g(x,y) = f(x,y) + \epsilon(x^2 + y^2)$)*.

Exercice 45 (Difficile). On note : K l'ensemble des suites croissantes $(x_i)_{0\leq i\leq n+1}$ de $n+2$ éléments de $[-1,1]$. Etudier le maximum sur K du déterminant de Vandermonde des x_i.

Exercice 46 (X 2001). Soient

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$$

des réels positifs. Prouver l'inégalité :

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} + (y_1 y_2 \ldots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq ((x_1 + y_1) \ldots (x_n + y_n))^{\frac{1}{n}}$$

Chapitre 2

Complément hors programme : étude locale théorique en un point critique d'une application d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$

Théorème 7 (Hors programme). *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. Soit $a \in U$ un point critique de f. Notons $H(a)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice hessienne de f en a, également notée*

$$\boxed{H(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{1 \leq i,j \leq n}}$$

Soit $U_a = \{\overrightarrow{h} \in \mathbf{R}^n \ / \ a + \overrightarrow{h} \in U\}$. Pour $\overrightarrow{h} \in U_a$, on a le développement limité d'ordre 2 suivant :

$$\boxed{f(a+\overrightarrow{h}) = f(a) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{h}|H(a).\overrightarrow{h}\right) + ||\overrightarrow{h}||^2\, \epsilon_a(\overrightarrow{h})}$$

avec $\boxed{\lim\limits_{\overrightarrow{h} \to 0} \epsilon_a(\overrightarrow{h}) = 0}$*, ou encore :*

$$\boxed{f(a+\overrightarrow{h}) = f(a) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{h}|H(a).\overrightarrow{h}\right) + O\left(||\overrightarrow{h}||^2\right)}$$

Démonstration. Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, posons :

$$\boxed{|||S||| = \sup_{||\overrightarrow{h}||=1} |{}^t\overrightarrow{h}\, S\, \overrightarrow{h}| = \sup_{||\overrightarrow{h}||=1} |(\overrightarrow{h}|S\overrightarrow{h})| = \sup_{||\overrightarrow{h}||\neq 0} \frac{|(\overrightarrow{h}|S\overrightarrow{h})|}{(\overrightarrow{h}\,|\,\overrightarrow{h})}}$$

dont l'existence est assurée par la compacité de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ et par la continuité de l'applications bilinéaire $(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}) \mapsto (\overrightarrow{h}|S\overrightarrow{k})$ et de l'application linéaire $\overrightarrow{h} \mapsto (\overrightarrow{h}, \overrightarrow{h})$ en dimension finie, qui entrainent celle de $\overrightarrow{h} \mapsto (\overrightarrow{h}|S\overrightarrow{h})$. On prouve aisément que $|||\quad|||$ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et que $|(\overrightarrow{h}|S\overrightarrow{h})| \leq |||S|||.||\overrightarrow{h}||^2$.
L'application de U dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ définie par $x \mapsto H(x)$ est continue car ses composantes dans la base naturelle de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ le sont. Soit $\epsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que :

$$\boxed{||\overrightarrow{h}|| < \delta \Rightarrow \overrightarrow{h} \in U_a \;\text{ et }\; |||H(a+\overrightarrow{h}) - H(a)||| < \epsilon}$$

Fixons un tel $\overrightarrow{h}$ et appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $\phi(t) = f(a + t\,\overrightarrow{h})$ entre 0 et 1.

$$\boxed{\phi'(t) = \mathrm{d}f(a+t\,\overrightarrow{h}).\overrightarrow{h} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+t\,\overrightarrow{h})\, h_j}$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur U. La dérivation de cette formule donne donc :

$$\boxed{\phi\text{"}(t) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+t\,\overrightarrow{h})\, \overrightarrow{h}_i h_j = \left(\overrightarrow{h}|H(a+t\,\overrightarrow{h}).h\right)}$$

Comme a est un point critique de f, il vient $\phi'(0) = \mathrm{d}f(a).\overrightarrow{h} = 0$ d'où :

$$\boxed{f(a+\overrightarrow{h}) = \phi(1) = f(a) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\left(\overrightarrow{h}|H(a+t\,\overrightarrow{h}).\overrightarrow{h})\right)\,\mathrm{d}t}$$

or :

$$\left|\int_0^1 (1-t)\left(\overrightarrow{h}|H(a+t\,\overrightarrow{h}).\overrightarrow{h})\right)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)\left(\overrightarrow{h}|H(a).\overrightarrow{h})\right)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leq \int_0^1 (1-t)\left|(\overrightarrow{h}|(H(a+t\overrightarrow{h})-H(a)).\overrightarrow{h})\right| \,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_0^1 (1-t)|||H(a+t\overrightarrow{h})-H(a)|||.||\overrightarrow{h}||^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)\epsilon\,||\overrightarrow{h}||\,\mathrm{d}t = \frac{\epsilon\,||\overrightarrow{h}||^2}{2}$$

donc $|\epsilon_a(\overrightarrow{h})| < \epsilon$ ce qui prouve le développement limité voulu. □

Proposition 13. *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus :*
- *Si $H(a)$ est définie positive resp négative alors a est un minimum resp un maximum local.*
- *Si $\overrightarrow{h}$ est un vecteur propre de $H(a)$ associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$ alors f admet un minimum ou un maximum local* **dans la direction de** $\overrightarrow{h}$ *suivant que $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$.*

Démonstration. Contentons nous de traiter le cas où $H(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, le reste est à l'avenant.
Si $\lambda > 0$ est la plus petite valeur propre de $H(a)$, il vient :

$$(\overrightarrow{h}|H(a).\overrightarrow{h}) \geq \lambda\,(\overrightarrow{h}|\overrightarrow{h})$$

D'où, en choisissant $||\overrightarrow{h}||$ assez petit pour que $|\epsilon_a(\overrightarrow{h})| \leq \frac{\lambda}{2}$:

$$f(a+\overrightarrow{h}) - f(a) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{h}|H(a).\overrightarrow{h}) + ||\overrightarrow{h}||^2\,\epsilon_a(\overrightarrow{h}) \geq 0$$

ce qu'on voulait. □