# ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PC*2

3 mars 2004

# Table des matières









Le symbole **K** désigne **R** ou **C**.

# Chapitre 1

# Normes et distances, suites

## 1.1 Définitions et exemples

**Définition 1 (Définition des normes).** Se reporter au cours sur les espaces préhilbertiens. Si $N$ est une norme sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$, le couple $(E, N)$ est appelé *espace vectoriel normé.*

*Remarque* 1. La propriété $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ sera souvent appelée *homogénéité de la norme.*

**Exemple 1 (Normes classiques).** Le programme exige de connaitre :

– Les trois normes classiques notées $N_\infty$, $N_1$, $N_2$ sur $\mathbf{K}^n$. On les note aussi entre doubles barres ($\|\ \|_\infty$) *etc.*
On doit aussi connaître l'inégalité de Cauchy-schwarz sur $\mathbf{C}^n$ : Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ appartiennent à $\mathbf{C}^n$ :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq N_2(x) N_2(y)$$

Même chose sur $\mathbf{R}^n$.

– Les trois normes classiques sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbf{K})$ notées pareillement et les inégalités, valables pour tout $f \in E$ et pour tout $g \in E$ :

$$N_1(f) \leq (b - a) N_\infty(f)$$

$$N_2(f) \leq \sqrt{b - a} N_\infty(f)$$





$$N_1(f) \leq \sqrt{b - a} N_2(f)$$

(Cauchy-Schwarz)

$$|(f|g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f) N_2(g)$$

(Cauchy-Schwarz) Avec, dans le cas hermitien :

$$(f|g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, \mathrm{d}t$$

On rappelle que si $E$ est l'espace des fonctions continues par morceaux, à valeurs dans $\mathbf{K}$, ces inégalités restent valables mais il s'agit de semi-normes.

– La norme $N_1$ sur l'espace $E_1$ des fonctions continues, intégrables sur un intervalle $I$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ :

$$N_1(f) = \int_I |f(t)|\, \mathrm{d}t$$

Même remarque que précédemment pour les fonctions continues par morceaux.

– La norme $N_2$ sur l'espace $E_2$ des fonctions continues, intégrables sur un intervalle $I$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ :

$$N_2(f) = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\, \mathrm{d}t}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz afférente qui s'énonce ainsi : Si $f$ et $g$ appartiennent à $E_2$, alors $fg \in E_1$ et :

$$|(f|g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f) N_2(g)$$

Même remarque que précédemment pour les fonctions continues par morceaux.

**Exemple 2.** Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on pose :

$$N(A) = n \max |a_{i,j}|$$

$N$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui est, de surcroît, une *norme d'algèbre ie* qui vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ N(AB) \leq N(A) N(B)$$

**Exercice 1.** Soit $F$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $]0,+\infty[$. Déterminer :

$$\inf_{f\in F}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

**Exercice 2.** Définir des normes du même type que $N_1$, $N_2$, $N_\infty$ sur des espaces **convenables** de suites complexes (ou réelles). Prouver des inégalités analogues à celles ci-dessus.

**Exercice 3.** Pour $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose :

$$N_2(A)=\sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$$

Démontrer que $N_2$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

**Exercice 4 (Inégalités de Hölder et de Minkowski).**

1. Soient $p$ et $q$ deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

En utilisant la concavité d'une fonction adéquate, prouver, pour tout couple $(a,b)$ de réels positifs, l'inégalité :

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

2. Pour $x=(x_1,\dots,x_n)$ appartenant à $\mathbf{R}^n$, on pose :

$$N_p(x)=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$$

Prouver, pour $x$ et $y$ dans $\mathbf{R}^n$, l'inégalité :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\le\sum_{i=1}^n|x_i||y_i|\le N_p(x)N_q(y)$$





3. Etablir que $N_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$. Pour établir l'inégalité triangulaire, observer que :

$$|x+y|^p\le|x||x+y|^{p-1}+|y||x+y|^{p-1}$$

4. En déduire que l'ensemble des suites réelles $(x_n)$ telles que la série $\sum_{n\ge0}|x_n|^p$ converge est un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

**Proposition 1.** *Soit $(E,N)$ un espace vectoriel normé. Pour $x$ et $y$ appartenant à $E$ :*

$$|N(y)-N(x)|\le N(y-x)$$

*Démonstration.* *cf* cours sur les espaces préhilbertiens. □

**Définition 2 (Distance).** Soit $(E,N)$ un espace vectoriel normé. Pour $x$ et $y$ appartenant à $E$, on pose :

$$\mathrm{d}(x,y)=N(y-x)$$

*distance* entre les points $x$ et $y$ **associée à la norme** $N$ . Elle vérifie les propriétés :

– $\mathrm{d}(x,y)\ge0$ et :
$$\mathrm{d}(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$$
– Pour tous $x$, $y$ de $E$ :
$$\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$$
– Pour tous $x$, $y$, $z$ de $E$ :
$$|\,\mathrm{d}(x,y)-\mathrm{d}(y,z)|\le\mathrm{d}(x,z)\le\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$$
qu'on interprétera en dessinant le triangle $xyz$.

**Définition 3 (Boules).** Soit $(E,N)$ un espace vectoriel normé. Pour $x\in E$ et $r\ge0$, on pose :

$$B_F(x,r)=\{y\in E,\ \mathrm{d}(x,y)\le r\}$$

*Boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$.*

$$S(x,r)=\{y\in E,\ \mathrm{d}(x,y)=r\}$$

*Sphère de centre $x$ et de rayon $r$.*

$$B(x,r)=\{y\in E,\ \mathrm{d}(x,y)<r\}$$

*Boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$.* Cette dernière est vide si $r=0$.

**Exemple 3.** Dessin des boules unités pour les trois normes usuelles de $\mathbf{R}^2$.

> *Remarque* 2. L'homogénéité des normes permettra, comme dans la démonstration de l'inégalité de Hölder, de limiter, par homothétie, la preuve d'une relation homogène, portant sur un vecteur $x$, au cas où $x$ est sur la sphère unité.

**Exercice 5.** Démontrer que l'application :

$$(x, y) \mapsto \int_0^1 |x + ty| \, \mathrm{d}t$$

définit une norme sur $\mathbf{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.

**Exercice 6 (Mines 98).** dans $\mathbf{R}^n$, existe-t-il des triangles simultanément équilatéraux pour les trois normes usuelles ?

**Définition 4 (Parties bornées).** Une partie $A$ d'un espace vectoriel normé $(E, N)$ est dite *bornée* si et seulement si la partie de $\mathbf{R}_+$ définie par :

$$N(A) = \{N(x),\ x \in A\}$$

est bornée.

**Proposition 2.** *Toute boule est bornée.*

*Démonstration.* **Faire un dessin**. Soit $B = B_F(a, r)$. Si $x \in B$ :

$$N(x) \leq N(a) + N(x - a) \leq N(a) + r = \rho$$

Donc

$$B \subset B_F(0, \rho)$$

□

> *Remarque* 3. Cette notion dépend évidemment de la norme $N$. **Dans la suite, lorsqu'on parlera de partie bornée, suite bornée,** *etc.* **de $\mathbf{K}^n$ on supposera implicitement qu'il s'agit de la norme $N_\infty$ jusqu'à ce qu'on prouve qu'en dimension finie c'est indépendant de la norme**.





## 1.2 Suites d'éléments d'un K-espace vectoriel normé

**Il est conseillé de revoir son cours de première année sur les suites de nombres réels.**

### 1.2.1 Convergence

**Définition 5 (Suites convergentes).** On dit qu'une suite $(x_n)$ de vecteurs de l'espace vectoriel normé $E$ *converge vers un vecteur* $x \in E$ si et seulement si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. La suite réelle de terme général $N(x_n - x)$ tend vers 0.
2. $$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > N \Rightarrow N(x_n - x) < \epsilon$$

   On notera que dans cette dernière propriété, toutes les inégalités peuvent être élargies (pourquoi ? ) sauf $\epsilon > 0$.

Si la suite $(x_n)$ converge vers $x$, on dira que $x$ est une limite de la suite $(x_n)$ et on notera :

$$x_n \to x$$

*Démonstration.* L'équivalence des deux propriétés s'établit *via* la définition de la limite d'une suite de réels. □

**Proposition 3.** *La limite d'une suite convergente est unique ce qui autorisera à écrire, lorsque la suite $(x_n)$ converge vers le vecteur $x$ :*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

*Démonstration.* Supposons $x_n \to x$ et $x_n \to y$. Il vient alors, pour tout $n$ :

$$0 \leq N(y - x) \leq N(y - x_n) + N(x_n - x) = u_n$$

Or la suite réelle $(u_n)$ converge vers 0. le passage de l'inégalité ci-dessus à la limite donne :

$$N(y - x) = 0 \quad ie \quad y = x$$

□

*Remarque* 4. La notation $\lim x_n = \ldots$ **est dangereuse** car elle incite à croire que la suite $x_n$ possède toujours une limite, ce qui n'est pas. Comme lorsqu'on écrit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$, il faut d'abord prouver la convergence de la série, lorsqu'on écrit $\lim x_n = \ldots$, il faut pouvoir citer une bonne raison qui fait de la suite $(x_n)$ une suite convergente. Les principaux arguments sont :

: La suite $(x_n)$ s'obtient par un calcul algébrique à partir de suites convergentes *cf supra*. On justifie alors la convergence de $(x_n)$ par une formule du type :

**Les arguments opératoires** « D'après les théorèmes opératoires sur les limites *etc.* »

Ces théorèmes, vus en première année pour les suites réelles et complexes, seront généralisés plus loin aux suites vectorielles.

**L'encadrement des suites réelles** : Revoir le théorème de convergence d'une suite réelle par encadrement.

**Les raisons théoriques** : par exemple :
- "Epsilonage" direct.
- Suite réelle croissante et majorée *resp etc.*
- Convergence de la série $\sum N(x_{n+1} - x_n)$ lorsque $E$ est de dimension finie *cf supra*.
- Critère de Cauchy lorsque $E$ est de dimension finie *cf supra*.

**Exercice 7.** Prouver que si $(x_n)$ est une suite d'éléments de $(E, N)$ telle que :

$$\lim x_{2n} = x \quad \text{et} \quad \lim x_{2n+1} = x$$

alors $(x_n)$ converge vers $x$.

**Exercice 8.** Prouver que si $(x_n)$ est une suite d'éléments de $(E, N)$ qui converge vers $x$ alors la suite $(y_n)$ définie par :

$$y_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x_k}{2^n}$$

converge vers $x$. On pourra commencer par le cas $x = 0$.

**Exercice 9.** Soit $(x_n)$ une suite bornée de vecteurs du $\mathbf{K}$ espace vectoriel normé $E$ telle que la suite $(x_n + \frac{1}{2}x_{2n})$ tend vers 0.Montrer que $(x_n)$ tend vers 0. *indication : poser* $y_n = x_n + \frac{x_{2n}}{2}$ *et exprimer* $x_n$ *en fonction de* $y_n, y_{2n}, \ldots y_{2^p n}$ *et de* $x_{2^{p+1} n}$.





### 1.2.2 Divergence

**Définition 6 (Suites divergentes).** Une suite $(x_n)$ de $(E, N)$ est dite *convergente* lorsqu'elle admet une limite, *divergente* dans le cas contraire. La divergence de $(x_n)$ se traduit par :

$$\forall x \in E, \exists \epsilon > 0, \ \forall N, \ \exists n > N, \ N(x_n - x) \geq \epsilon$$

On va développer cela de manière plus efficace.

**Définition 7 (Suites extraites).** On appelle *suite extraite ou sous suite* de la suite $(x_n)$ de vecteurs de $(E, N)$, toute suite de la forme $(x_{\phi(n)})$ où $\phi$ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.

**Proposition 4.** *Si* $(x_n)$ *est une suite d'éléments de* $(E, N)$ *qui converge vers* $x \in E$ *(resp une suite de réels qui tend vers* $x \in \overline{R}$*), toute sous suite de* $(x_n)$ *converge vers* $x$ *(resp tend vers* $x$*).*

*Démonstration.* On prouve d'abord, par récurrence sur $n$ que, si $\phi$ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \phi(n) \geq n$$

C'est clair pour $n = 0$.
Si c'est vrai pour $n$ alors :

$$\phi(n+1) \geq 1 + \phi(n) \geq n + 1$$

Supposons que la suite $(x_n)$ d'éléments de $(E, N)$ converge vers $x \in E$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$n > N \Rightarrow N(x_n - x) < \epsilon$$

Si $n > N$ alors $\phi(n) \geq n > N$ donc $N(x_{\phi(n)} - x) < \epsilon$ et :

$$\lim x_{\phi(n)} = x$$

Les lecteurs traiteront, en apprenant le cours, le cas où $(x_n)$ est une suite de réels tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$. □

**Exemple 4 (Mode d'emploi).** Pour prouver qu'une suite $(x_n)$ n'a pas de limite, on peut essayer de trouver deux sous suites $x_{\phi(n)}$ et $x_{\psi(n)}$ de $(x_n)$ qui tendent vers des limites différentes.
Prenons $x_n = (-1)^n$ dans l'espace normé $(\mathbf{R}, |\ \ |)$. Les deux sous suites $(x_{2n})$ et $x_{2n+1}$ convergent vers 1 et $-1$. Donc $(x_n)$ n'a pas de limite.

**Exercice 10.** Donner l'exemple d'une suite divergente $(x_n)$ de réels telle que, pour tout entier $k \geq 2$, la sous suite $(x_{kn})$ converge vers 0.

### 1.2.3 Théorèmes opératoires

**Revoir d'abord le cours de première année**.
$(E, N)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. On précisera $\mathbf{K}$ si nécessaire.

**Proposition 5.** *Si $(x_n)$ est une suite de vecteurs de $E$ qui converge vers $x$ alors la suite réelle $(N(x_n))$ converge vers $N(x)$.*

*Démonstration.* car, pour tout $n$ :

$$0 \leq |N(x_n) - N(x)| \leq N(x_n - x)$$

et en vertu du théorème de convergence par encadrement des suites réelles. □

**Proposition 6.** *Toute suite convergente de vecteurs de $E$ est bornée.*

*Démonstration.* Si $x_n \to x$, la suite $(N(x_n))$ converge vers $N(x)$ ; cette dernière suite est donc bornée. □

**Théorème 1 (Combinaison linéaire).** *Si $(x_n)$ et $(y_n)$ sont deux suites de vecteurs de $E$ respectivement convergentes vers $x$ et $y$ ; si $\lambda$ et $\mu$ appartiennent à $\mathbf{K}$ alors la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)$ converge vers $\lambda x + \mu y$.*

*Démonstration.* Il suffit d'écrire :

$$0 \leq N(\lambda x_n + \mu y_n - \lambda x - \mu y) \leq |\lambda| N(x_n - x) + |\mu| N(y_n - y)$$

La suite réelle majorante tend vers 0 d'où le résultat en vertu du théorème de convergence par encadrement des suites réelles. □

*Remarque* 5 *(Scission).* Si une somme de deux suites converge, il n'en est pas nécessairement de même de chacune d'elle. **Faire attention**.

**Théorème 2.** *Si $(x_n)$ est une suite de vecteurs de $E$ qui converge vers $x$ et si $(\lambda_n)$ est une suite de scalaires qui converge vers $\lambda$, la suite $(\lambda_n x_n)$ converge vers $\lambda x$.*

*Démonstration.*

$$\lambda_n x_n - \lambda x = \lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x$$





donc :

$$0 \leq N(\lambda_n x_n - \lambda x) \leq |\lambda_n| N(x_n - x) + |\lambda_n - \lambda| N(x)$$

La suite $(\lambda_n)$ est bornée car convergente donc :

$$\lim |\lambda_n| N(x_n - x) = 0$$

La suite majorante converge donc vers 0 en vertu du théorème sur la combinaison linéaire de deux suites réelles de limites nulles. D'où le résultat. □

**Exercice 11.**
1. Prouver que la suite $\left(e^{ni\theta}\right)$ converge si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante de convergence de la suite $(\sin n\theta)$.

## 1.3 Comparaison des normes

**Définition 8 (Applications lipschitziennes).** Soient $(E, N)$ et $(F, \|\ \|)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés et $f$ une application d'une partie $A$ de $E$ dans $F$.

- Soit $k \in [0, +\infty[$. $f$ est dite $k$-lipschitzienne sur $A$ si :

$$\forall x, y \in A,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\, N(x - y)$$

  par exemple l'application $N$ est 1-lipschitzienne de $(E, N)$ dans $(\mathbf{R}, |\ \ |)$.
- $f$ est dite lipschitzienne sur $A$ s'il existe $k \geq 0$ telle que $f$ soit $k$-lipschitzienne sur $A$.
- $f$ est dite contractante sur $A$ s'il existe $k \in [0, 1[$ telle que $f$ soit $k$-lipschitzienne sur $A$.

**Proposition 7.** *Soient $N$ et $N'$ deux normes sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$N'$ est lipschitzienne, avec un rapport $k > 0$, comme application de l'espace normé $(E, N)$ dans $(\mathbf{R}, |\ \ |)$.*
2. *Il existe un réel $k > 0$ tel que :*

$$\forall x \in E,\ N'(x) \leq k\, N(x)$$

3. *$N'$ est majorée sur la boule unité fermée de $(E, N)$.*

4. *Toute suite de $E$ qui converge vers* $0$ *au sens de $N$ converge vers* $0$ *au sens de* $N'$.

*Démonstration.* On conseille de faire des dessins.

$1 \Rightarrow 2$ : Si la propriété 1 est vraie, il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in E,\ |N'(x) - N'(y)| \leq k\, N(x - y)$$

En spécifiant $y = 0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient 2.

$2 \Rightarrow 1$ : Si la propriété 2 est vraie, il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ N'(x) \leq k\, N(x)$$

en appliquant cette inégalité à $x - y$, il vient :

$$N'(x - y) \leq k\, N(x - y)$$

Le résultat 1 provient de l'inégalité :

$$|N'(x) - N'(y)| \leq N'(x - y)$$

$2 \Rightarrow 3$ : La propriété 2, telle qu'écrite ci-dessus entraine que $N'(x) \leq k$ pour $N(x) \leq 1$ d'où 3.

$3 \Rightarrow 2$ : Supposons 3 vérifiée, *ie* il existe $k > 0$ tel que :

$$N(x) \leq 1 \Longrightarrow N'(x) \leq k$$

Soit $x \in E$. Si $x \neq 0$, $N(x) \neq 0$ donc on peut rendre $x$ unitaire (pour $N$) par homothétie :

$$u = \frac{x}{N(x)} \quad \text{alors} \quad N(u) = 1$$

On en déduit $N'(u) \leq k$ d'où, par homogénéité de $N'$ :

$$N'(x) \leq k\, N(x)$$

inégalité qui est encore vraie pour $x = 0$.





$2 \Rightarrow 4$ : Si 2 est vraie, il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ N'(x) \leq k\, N(x)$$

Soit alors $(x_n)$ une suite d'éléments de $E$ qui converge vers 0 pour la norme $N$ ; c'est-à-dire :

$$\lim N(x_n) = 0$$

Comme, pour chaque indice $n$ :

$$0 \leq N'(x_n) \leq k\, N(x_n)$$

Le théorème de convergence des suites réelles par encadrement assure :

$$\lim N'(x_n) = 0$$

et donc la propriété 4.

$4 \Rightarrow 2$ : Prouvons la contraposée de cette implication, c'est-à-dire :

$$\text{non}\, 2 \Longrightarrow \text{non}\, 4$$

Pour nier la propriété 2, il faut l'écrire **proprement et complètement** :

$$\exists k > 0,\ \forall x \in E,\ N'(x) \leq k\, N(x)$$

non 2 s'écrit alors :

$$\forall k > 0,\ \exists x \in E,\ N'(x) > k\, N(x)$$

Le $k$ étant désormais affublé d'un $\forall$, on peut le choisir comme on le désire. Choisissons $k = n \in \mathbf{N}$, il existe donc un vecteur $x_n$ tel que :

$$N'(x_n) > n\, N(x_n)$$

$x_n \neq 0$ car $N'(x_n) > 0$. On peut donc introduire :

$$u_n = \frac{x_n}{N'(x_n)}$$

Comme $N$ et $N'$ sont homogènes, il vient :

$$N'(u_n) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq N(u_n) < \frac{1}{n}$$

$(u_n)$ est donc une suite de vecteurs de $E$ qui tend vers 0 pour la norme $N$ mais pas pour la norme $N'$. la propriété non 4 en résulte.

□

### 1.3.1 Normes équivalentes

**Définition 9.** On dit que deux normes $N$ et $N'$ sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel$E$ sont équivalentes s'il existe deux **strictement positifs** $k$ et $k'$ tels que, pour tout $x \in E$ :

$$k\,N(x) \leq N'(x) \leq k'\,N(x)$$

*Remarque* 6. Pour prouver que $N$ et $N'$ sont équivalentes on cherche une majoration du type $N' \leq k\,N$ puis une majoration du type $N \leq k'\,N'$. Pour cela, il est souvent utile de majorer l'une des normes sur la boule (ou la sphère) unité de l'autre (*cf exemples ci-dessous*).
Pour prouver qu'on ne peut avoir une relation du type $N' \leq k\,N$, la technique la plus fréquemment efficace consiste à fabriquer une suite qui tend vers 0 pour $N$ mais pas pour $N'$.

**Exemple 5 (Comparaison des trois normes classiques sur $\mathbf{K}^n$).** Les normes $N_1$, $N_\infty$, $N_2$ de $\mathbf{K}^n$ sont équivalentes. On a, plus précisément, les inégalités **optimales** suivantes, valables pour tout $x \in \mathbf{K}^n$ :

$$\begin{aligned}
N_1(x) &\leq n\,N_\infty(x) && (1.1)\\
N_\infty(x) &\leq N_1(x) && (1.2)\\
N_2(x) &\leq \sqrt{n}\,N_\infty(x) && (1.3)\\
N_\infty(x) &\leq N_2(x) && (1.4)\\
N_1(x) &\leq \sqrt{n}\,N_2(x) && (1.5)\\
N_2(x) &\leq N_1(x) && (1.6)
\end{aligned}$$

Ces inégalités seront prouvées en cours.

**Exercice 12 (Centrale 98).** Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \,/\, f(0) = f'(0) = 0\}$$

On pose, pour $f \in E$ :

$$n(f) = \sup_{x\in R} |f(x) + f"(x)| \qquad N(f) = \sup_{x\in R} |f(x)| + \sup_{x\in R} |f"(x)|$$

Montrer que $E$ est un espace vectoriel réel sur lequel $N$ et $n$ sont des normes équivalentes.





**Exemple 6 (Exemple de normes non équivalentes).** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$. Les normes $||\ \ ||_\infty$, $||\ \ ||_1$, $||\ \ ||_2$ sont deux à deux non équivalentes.

**Exercice 13 (X 98).** Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. On pose, pour $f \in E$ :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Montrer que $N$ est une norme sur $E$, que dire si l'on remplace $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^1$ par morceaux ? Comparer $N$ et $N_\infty$.

**Exercice 14 (Difficile).** Prouver que si $F$ est un sous espace de $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ tel que les normes induites sur $F$ par $N_\infty$ et $N_2$ soient équivalentes, alors $F$ est de dimension finie. Même question avec $N_\infty$ et $N_1$.

**Proposition 8.** *Soient $N$ et $N'$ deux normes équivalentes sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $E$.*

1. *Les parties et les suites bornées de $E$ sont les mêmes pour $N$ et pour $N'$.*
2. *Une suite $(x_n)$ d'éléments de $E$ converge pour $N$ si et seulement si elle converge pour $N'$ et les limites sont alors les mêmes.*

*Démonstration.* Facile. Laissé aux lecteurs. □

*Remarque* 7. En fait, toutes les notions d'analyse et de topologie qu'on définira plus loin seront les mêmes pour $N$ et $N'$.

# Chapitre 2

# Espaces vectoriels normés de dimension finie

## 2.1 Les théorèmes fondamentaux

**Lemme 1.** *De toute suite de réels on peut extraire une suite monotone.*

*Démonstration.* Soit $(x_n)$ une suite de réels. Posons :

$$X_n = \{x_p,\ p \geq n\}$$

On remarque que :

$$q \geq p \Rightarrow X_q \subset X_p$$

Distinguons deux cas :

**a) Premier cas :** Pour tout $n$, $X_n$ admet un plus grand élément.

Notons $p(n)$ le plus petit indice $p \geq n$ tel que $x_p$ soit le plus grand élément de $X_n$. On remarquera qu'alors :

$$x_{p(n)} \in X_n \quad \text{car} \quad p(n) \geq n$$

Définissons maintenant, récursivement, une application $\phi$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} \phi(0) = p(0) \\ \phi(n) = p\,(1 + \phi(n-1)) \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

**Prouvons d'abord que $\phi$ est strictement croissante :**
Pour tout entier $n$, $p(n) \geq n$ donc :

$$\forall n,\ \phi(n+1) = p\,(1 + \phi(n)) \geq 1 + \phi(n)$$





**Prouvons maintenant que la sous suite $(x_{\phi(n)})$ décroît :**
$x_{\phi(0)}$ est le plus grand élément de $X_0 = \{x_p,\ p \geq 0\}$, on en déduit, en particulier, que :

$$\forall n,\ x_{\phi(n)} \leq x_{\phi(0)}$$

Soit $n \geq 1$ :
$x_{\phi(n)}$ est le plus grand élément de $X_{1+\phi(n-1)}$.
$x_{\phi(n+1)}$ est le plus grand élément de $X_{1+\phi(n)}$.
or :

$$x_{\phi(n+1)} \in X_{1+\phi(n)} \subset X_{1+\phi(n-1)}$$

Donc $x_{\phi(n)}$ majore $x_{\phi(n+1)}$ puisqu'il majore tous les éléments de $X_{1+\phi(n-1)}$ auquel $x_{\phi(n+1)}$ appartient.

**b) Deuxième cas :** Il indice un indice $k$ tel que $X_k$ n'admet pas de plus grand élément.

**Prouvons d'abord que pour tout indice $p \geq k$, il existe un indice $q > p$ tel que $x_q > x_p$ :**
Si ce n'était pas le cas, il existerait un indice $p \geq k$ tel que :

$$\forall q > p,\ x_q \leq x_p$$

le réel :

$$\max(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_p)$$

serait alors un plus grand élément de $X_k$, ce qui est impossible.
**On construit alors récursivement une application $\phi$, strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $(x_{\phi(n)})$ soit strictement croissante de la manière suivante :**
On pose $\phi(0) = k$.
On suppose avoir construit $\phi(0) < \phi(1) < \cdots < \phi(n)$ tels que :

$$x_{\phi(0)} < x_{\phi(1)} < \cdots < x_{\phi(n)}$$

$\phi(n) \geq \phi(0) = k$ donc, il existe un indice $q > \phi(n)$ tel que $x_q > x_{\phi(n)}$. On choisit un tel indice $q$ qu'on baptise $\phi(n+1)$.

□

**Théorème 3 (Bolzano-Weierstrass).** *De toute suite bornée de réels, ou de complexes, on peut extraire une suite convergente.*

*Au programme PC*.* Pour les suites de réels c'est une application immédiate du lemme précédent puisqu'une suite monotone bornée est convergente.
Considérons maintenant une suite bornée de complexes de terme général $z_n = x_n + iy_n$. Il vient, pour tout $n$ :

$$|x_n| \leq |z_n| \quad \text{et} \quad |y_n| \leq |z_n|$$

Les suites réelles $(x_n)$ et $(y_n)$ sont donc bornées. On peut donc extraire de la suite $(x_n)$ une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un réel $x$. On extrait ensuite, de la suite $(y_{\phi(n)})$, une suite $(y_{\phi\circ\psi(n)})$ qui converge vers $y$. Comme la suite $(x_{\phi\circ\psi(n)})$ est une sous suite de $(x_{\phi(n)})$, elle converge encore vers $x$ donc :

$$\lim(z_{\phi\circ\psi(n)}) = x + iy$$

□

**Proposition 9.** *Une suite d'élements de* $\mathbf{K}^p$*, de terme général*

$$x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{p,n})$$

*converge vers* $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ **pour la norme** $N_\infty$ *si et seulement si :*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ \lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$$

*Démonstration.* Supposons dabord $\lim x_n = x$ pour $N_\infty$. *ie* :

$$\lim_{n\to\infty} N_\infty(x_n - x) = 0$$

Fixons $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Pour tout $n$ :

$$0 \leq |x_{i,n} - x_i| \leq \max_{1\leq j\leq p} |x_{j,n} - x_j| = N_\infty(x_n - x)$$

D'après le théorème de convergence par encadrement des suites réelles :

$$\lim_{n\to\infty} |x_{i,n} - x_i| = 0$$

**Réciproquement :** Supposons que :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ \lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$$





Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier $n_i$ tel que :

$$n > n_i \Rightarrow |x_{i,n} - x_i| < \epsilon$$

Pour $n > N = \max(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ :

$$N_\infty(x_n - x) < \epsilon$$

□

**Théorème 4.** *De toute suite bornée de vecteurs de* $\mathbf{K}^p$*, pour la norme* $N_\infty$*, on peut extraire une suite convergente.*

*Démonstration.* On procède comme dans la preuve de la seconde partie du théorème 3. Considérons une suite bornée (pour $N_\infty$) d'élements de $\mathbf{K}^p$, de terme général :

$$x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{p,n})$$

Si $M \geq 0$ est un majorant de la suite de terme général $N_\infty(x_n)$, alors pour cha que $n$ :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ |x_{i,n}| \leq M$$

La suite $(x_{1,n})$ est bornée par $M$. On peut en extraire une suite convergente $(x_{1,\phi_1(n)})$ d'après 3. Posons :

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} x_{1,\phi_1(n)}$$

On prouve, par récurrence sur $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'existence d'extractions : $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_i$ telles que : pour tout $j \in [|1, i|]$, la suite de terme général :

$$x_{j,\phi_1\circ\phi_2\circ\cdots\circ\phi_i(n)}$$

converge. On notera $x_j$ sa limite. C'est prouvé pour $i = 1$. Supposons le établi pour $i < p$. Considérons alors la suite d'éléments de $\mathbf{K}$ de terme général :

$$x_{i+1,\phi_1\circ\phi_2\circ\cdots\circ\phi_i(n)}$$

Cette suite est bornée par $M$. D'après le théorème 3, On peut en extraire une suite convergente dont la limite sera notée $x_{i+1}$. Il existe donc une extraction $\phi_{i+1}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} x_{i+1,\phi_1\circ\phi_2\circ\cdots\circ\phi_{i+1}(n)} = x_{i+1}$$

Si maintenant $j \leq i+1$, la suite de terme général :

$$x_{j,\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_{i+1}(n)}$$

est une suite extraite de la suite de terme général :

$$x_{j,\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_i(n)}$$

Il vient donc :

$$\forall j \in [|1, i+1|],\ \lim_{n\to\infty} x_{j,\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_{i+1}(n)} = x_j$$

ce qui clos la récurrence. En appliquant ce résultat pour $i = p$ et en posant :

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_p$$

qui est une extraction, il vient :

$$\forall j \in [|1, p|],\ \lim_{n\to\infty} x_{j,\phi(n)} = x_j$$

ce qui se traduit *via* la proposition 9 par

$$\lim_{n\to\infty} x_{\phi(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

□

**Théorème 5.** *Sur un* **K***-espace vectoriel* $E$ *de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

*Démonstration.* Hors programme. Les lecteurs intéressés la trouveront en exercice ci-dessous. Il est détaillé et assez facile. □

**Exercice 15.** 1. Soit $N$ une norme sur $\mathbf{K}^p$ ($p \geq 1$). On va d'abord prouver que $N$ est équivalente à $N_\infty$. La base canonique de $\mathbf{K}^p$ est notée $(\epsilon)$. On note $S$ la sphère unité de $\mathbf{K}^p$ **pour la norme** $N_\infty$.

(a) Prouver que le réel :

$$k = \sum_{j=1}^{p} N(\epsilon_j)$$

est strictement positif, puis que :

$$N \leq k\, N_\infty$$





(b) Démontrer l'existence de :

$$m = \inf_{x\in S} N(x)$$

et prouver que $m \geq 0$. On va prouver que $m$ est atteinte.

(c) Prouver l'existence d'une suite $(x_n)$ de vecteurs de $S$ telle que, pour tout entier $n$ :

$$m \leq N(x_n) < m + \frac{1}{n+1}$$

(d) Démontrer qu'on peut extraire, de la suite $(x_n)$, une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in \mathbf{K}^p$. Démontrer que $x \in S$.

(e) Prouver, en utilisant la question 1a que :

$$\lim_{n\to\infty} N(x_{\phi(n)}) = N(x)$$

en conclure que $N(x) = m$ et que $m > 0$.

(f) démontrer que, pour tout $x \in E$ :

$$N(x) \geq m\, N_\infty(x)$$

(g) Conclure.

2. Déduire, de ce qui précède, que deux normes quelconques sur un **K**-espace vectoriel $E$ de dimension $p$ sont équivalentes.

**Exercice 16.** Montrer qu'existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute solution $y$ sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y"(x) - \mathrm{e}^x\, y(x) = 0$$

On ait :

$$\int_0^1 |y(t)|\,\mathrm{d}t \leq C\,(|y(0)| + |y(1)|)$$

*[On pourra d'abord montrer que, si* $y$ *est une solution de* $E$ *nulle en* 0 *et* 1*,* $y^2$ *est convexe sur* $[0,1]$*]*

**Proposition 10 (Continuité des formes coordonnées).** - *Soit* $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* $E$*. On note* $(\pi_1, \ldots, \pi_p)$ *le système des formes coordonnées relativement à* $(e)$*. Il existe alors une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \forall x \in E,\ |\pi_i(x)| \leq C\, N(x)$$

*Démonstration.* Pour $x \in E$, posons :

$$N'(x) = \sum_{j=1}^{p} |\pi_j(x)|$$

Les lecteurs prouveront que $N'$ est une norme sur $E$. Cette norme est donc équivalente à la norme $N$. En particulier, il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, N'(x) \leq C\, N(x)$$

Or $|\pi_i(x)| \leq N'(x)$ d'où le résultat. □

## 2.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

### 2.2.1 Expression de la convergence séquentielle dans une base

**Proposition 11.** *Pour qu'une suite* $(x_n)$ *d'éléments d'un espace vectoriel normé* $E$ *de dimension finie soit convergente, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de* $(E)$ *soient convergentes. Les coordonnées de la limite de* $(x_n)$ *sont alors les limites des coordonnées.*

*Démonstration.* Soit $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $(E)$ et $(\pi_1, \ldots, \pi_p)$ le système des formes coordonnées correspondantes. On a vu qu'il existait $C > 0$ tel que, pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$, on ait :

$$\forall x \in E,\ |\pi_i(x)| \leq C\, N(x)$$

Soit maintenant $(x_n)$ une suite de vecteurs de $E$ qui converge vers $x \in E$. Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ :

$$0 \leq |\pi_i(x) - \pi_i(x_n)| = |\pi_i(x - x_n)| \leq C\, N(x - x_n)$$





Comme $\lim N(x - x_n) = 0$, le théorème de convergence des suites réelles par encadrement assure que :

$$\lim_{n \to \infty} \pi_i(x_n) = \pi_i(x)$$

**Réciproquement :** supposons que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on ait :

$$\lim_{n \to \infty} \pi_i(x_n) = \pi_i(x)$$

Il vient alors :

$$0 \leq N(x - x_n) = N\left(\sum_{j=1}^{p} \pi_j(x - x_n)\, e_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} |\pi_j(x - x_n)|\, N(e_j)$$

Le deuxième membre de cette inégalité est une somme de $p$ suites réelles qui tendent vers 0. Il tend donc vers 0 d'où, par encadrement :

$$\lim_{n \to \infty} N(x - x_n) = 0$$

□

**Exercice 17.** Soit $E$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé, non nécessairement de dimension finie, $p \geq 2$ fixé. Étudier la suite de vecteurs de $E$ définie par :

$$x_0, x_1, \ldots, x_{p-1} \quad \text{et la récurrence} \quad x_{n+p} = \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+p-1}}{p}$$

Montrer qu'elle converge.

**Théorème 6 (De Bolzano Weierstrass).** *Dans un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $E$ **de dimension finie***, une suite* $(x_n)$ *bornée pour une norme* $N$ *l'est pour n'importe quelle autre norme. On peut en extraire une sous suite convergente.*

*Démonstration.* Deux normes quelconques sont équivalentes, la notion de suite bornée d'éléments de $E$ ne dépend donc pas de la norme choisie.
Soit $(x_n)$ une suite bornée d'éléments de $E$. Chosissons une base $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ de $(E)$ et soit $(\pi_1, \ldots, \pi_p)$ le système des formes coordonnées correspondantes. La suite $(u_n)$ de vecteurs de $\mathbf{K}^p$ définie par :

$$u_n = (\pi_1(x_n), \ldots, \pi_p(x_n))$$

est une suite bornée de $\mathbf{K}^p$, d'après la proposition 10. On peut, en vertu du théorème 4, en extraire une suite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$. D'après la proposition qui précède, il vient :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\phi(n)} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, e_j$$

□

### 2.2.2 Suites de Cauchy

**Définition 10.** Une suite $(x_n)$ de l'espace vectoriel normé $(E, N)$ de dimension finie est dite *de Cauchy* si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists, n_0 \in \mathbf{N},\ \forall p, q \in \mathbf{N},\ p > n_0 \text{ et } q > n_0 \Rightarrow N(x_p - x_q) < \epsilon$$

*Remarque* 8. D'après le théorème d'équivalence des normes, cette propriété ne dépend pas de la norme choisie dans $E$.

**Lemme 2.** *Toute suite de Cauchy est bornée.*

*Démonstration.* Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy. Il existe un $n_0$ tel que :

$$p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \Rightarrow N(x_p - x_q) < 1$$

Donc, pour $q > n_0$, $N(x_{n_0} - x_q) < 1$ et donc :

$$N(x_q) \leq N(x_{n_0}) + N(x_q - x_{n_0}) < N(x_{n_0}) + 1$$

Pour $q$ quelconque dans $\mathbf{N}$, il vient donc :

$$N(x_q) \leq \max(N(x_0), \ldots, N(x_{n_0}), N(x_{n_0}) + 1)$$

□

**Lemme 3.** *Soit $(x_{\phi(n)})$ une suite extraite d'une suite $(x_n)$ de Cauchy. On suppose $\lim x_{\phi(n)} = x$. Alors $(x_n)$ converge vers $x$.*





*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$ et $n_0$ tel que :

$$p > n_0 \text{ et } q > n_0 \Rightarrow N(x_p - x_q) < \frac{\epsilon}{2}$$

Il existe $n_1$ tel que :

$$n > n_1 \Rightarrow N(x_{\phi(n)} - x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Soit $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$. Il vient :

$$\phi(n) \geq n > n_2$$

donc :

$$N(x_n - x_{\phi(n)}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad N(x_{\phi(n)} - x) < \frac{\epsilon}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire : $N(x_n - x) < \epsilon$. □

**Théorème 7.** *Une suite $(x_n)$ d'éléments de l'espace vectoriel normé $E$ converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

*Démonstration.* Si $(x_n)$ converge vers $x$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow N(x_n - x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Donc, si $p$ et $q$ sont $> n_0$ :

$$N(x_p - x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad N(x - x_q) < \frac{\epsilon}{2}$$

Donc $N(x_p - x_q) < \epsilon$ par l'inégalité triangulaire. On a prouvé qu'une suite convergente est de Cauchy.
**Réciproquement :** si $(x_n)$ est une suite de Cauchy, elle est bornée, on peut donc en extraire une suite convergente (Bolzano-Weierstrass). Elle converge donc en vertu du lemme précédent. □

**Exercice 18 (ENS 2001, 2002).** Soit $\mathcal{B}(I, \mathbf{R})$ l'espace des applications bornées d'un intervalle $I$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme $||\quad||$ définie par :

$$||f|| = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Soit $E$ un sous espace de dimension finie de $E$.

1. Montrer qu'existe une partie finie $X \subset I$ telle que l'application $N_X$ de $E$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$N_X(f) = \max_{x \in X} |f(x)|$$
soit une norme sur $E$.
2. Montrer que toute suite d'éléments de $E$ qui converge simplement sur $I$ converge uniformément vers un élément de $E$.
3. Montrer qu'une limite simple de fonctions de $E$ qui sont continues sur $I$ est un élément de $E$ continu sur $I$.

**Théorème 8.** *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie $E$, toute série, $\sum x_n$, normalement convergente ie telle que la série $\sum N(x_n)$ converge, est convergente.*

*Démonstration.* Soit $\sum x_n$ une série normalement convergente. Posons :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$
Il vient alors, pour $p$ et $q$ quelconques (On suppose $p \geq q$ puis on fait de même pour $q \geq p$) :
$$N(S_p - S_q) = N\left(\sum_{k=q}^{p} x_k\right) \leq \sum_{k=q}^{p} N(x_k)$$
On en déduit que, si la série $\sum N(x_n)$ converge, la suite de ses sommes partielles est de Cauchy, donc aussi la suite $(S_n)$ qui converge donc. □

*Remarque* 9. On aurait aussi pu prouver que la série des composantes dans une base etait absolument convergente.

**Exemple 7.** Dans l'exemple 2, on a vu qu'en posant pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ :
$$N(A) = p \max |a_{i,j}|$$
on y définissait une norme d'algèbre. Supposons $N(A) < 1$. La série d'élements de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ de terme général $A^n$ est normalement convergente puisque :
$$0 \leq N(A^n) \leq N(A)^n \quad \text{et} \quad 0 \leq N(A) < 1$$





Puisque $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ est de dimension finie, cette série converge. Soit $S$ sa somme :
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$
Les lecteurs prouveront que $(\mathrm{I}_p - A)S_n = \mathrm{I}_p - A^{n+1}$ et comme :
$$0 \leq N(A^{n+1}) \leq N(A)^{n+1}$$
la suite $(A^{n+1})$ tend vers 0 et :
$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{I}_p - A)S_n = \mathrm{I}_p$$
Prouvons que cette limite vaut aussi $(\mathrm{I}_p - A)S$. En effet si l'on considère :
$$U_n = (\mathrm{I}_p - A)S - (\mathrm{I}_p - A)S_n$$
Il vient, puisque la norme $N$ est multiplicative :
$$0 \leq N(U_n) \leq N(\mathrm{I}_p - A)\, N(S - S_n)$$
Suite réelle de limite nulle.
L'unicité de la limite assure donc :
$$(\mathrm{I}_p - A)S = \mathrm{I}_p \quad \text{donc } (\mathrm{I}_p - A) \text{ est inversible et} \quad S = (\mathrm{I}_p - A)^{-1}$$

**Exercice 19.** Avec les notations de l'exemple précédent. Prouver que, si $N(A) < 1$, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telle que : $B^2 = (\mathrm{I}_p + A)$

*Remarque* 10. On peut prouver que la convergence des suites de Cauchy équivaut à la convergence des séries normalement convergentes. Ces deux résultats servent, avec le théorème de la convergence monotone, à prouver la convergence d'une suite (quitte à en ramener l'étude à celle d'une série) sans savoir en expliciter la limite. **Dans le contexte d'un problème d'analyse, il est majoritairement plus simple de tenter de prouver que le série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est normalement convergente que d'utiliser le critère de Cauchy**. Le critère de Cauchy est davantage d'essence géométrique que calculatoire ; il fonctionne bien dans les situations géométriques *cf exercice supra*.

**Exercice 20 (X 98).** Pour $P = \sum_{n\in N} a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$, on pose :

$$N_\infty(P) = \max(|a_n|) \quad N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2}$$

1. Vérifier qu'il s'agit de normes sur $\mathbf{C}[X]$. Sont elles équivalentes ? Sont elles équivalentes sur $\mathbf{C}_N[X]$ ?
2. Trouver une suite de Cauchy dans $\mathbf{C}[X]$ pour l'une de ces trois normes qui ne converge pas dans $\mathbf{C}[X]$.

### 2.2.3 Méthode du point fixe

**Définition 11 (Parties fermées).** On dit qu'une partie $F$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $E$ est *fermée* si et seulement si la limite de toute suite **convergente** d'éléments de $F$ est dans $F$.

*Remarque* 11. Un fermé de $E$ est une partie de $E$ qui "retient les limites des suites convergentes". De fait, un fermé "retient tout ce qui peut être apparenté à une limite" (limites de fonctions, bornes supérieures *etc.* )

*Remarque* 12. En dimension finie, cette notion ne dépend pas de la norme choisie puisque deux normes quelconques étant équivalentes, elles définissent les mêmes suites convergentes et les mêmes limites.

**Théorème 9 (Du point fixe).** *Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. $F$ un fermé non vide de $E$ et $f$ une application de $F$ dans $E$. On suppose :*

1. *$F$ est stable par $f$.*
2. *$f$ est* **contractante** *sur $F$. ie il existe $k \in ]0,1[$ tel que :*

$$\forall x, x' \in F,\ N\left[f(x') - f(x)\right] \leq k\, N(x' - x)$$

*Alors la suite $(x_n)$ d'éléments de $F$ définie par $x_0 \in F$ et la récurrence :*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

*converge vers un élement $x \in F$ qui est, en outre, l'unique point fixe de $f$.*





*Démonstration.* La suite $(x_n)$ est bien définie et c'est une suite d'éléments de $F$ vu la stabilité de $F$ par $f$.
Prouvons la convergence en norme de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$. Il vient, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$N(x_{n+1} - x_n) = N\left(f(x_n) - f(x_{n-1})\right) \leq k\, N(x_n - x_{n-1})$$

D'où, par une récurrence évidente :

$$0 \leq N(x_{n+1} - x_n) \leq k^n\, N(x_1 - x_0)$$

D'où la convergence de la série $\sum N(x_{n+1} - x_n)$ puisque $0 < k < 1$. On en déduit la convergence de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ et donc la convergence de la suite $(x_n)$. Posons $x = \lim x_n$. *A priori*, $x \in E$ **mais comme $F$ est fermé par hypothèse, il vient** $x \in F$.
Prouvons que $f(x) = x$ : On a :

$$0 \leq N(x_{n+1} - f(x)) \leq k\, N(x_n - x) \to 0$$

Donc $\lim x_{n+1} = f(x)$ et $f(x) = x$ par unicité de la limite. $x$ est donc un point fixe de $f$. Si $x' \in F$ est un autre point fixe de $f$ :

$$N(x - x') = N(f(x) - f(x')) \leq k\, N(x - x')$$

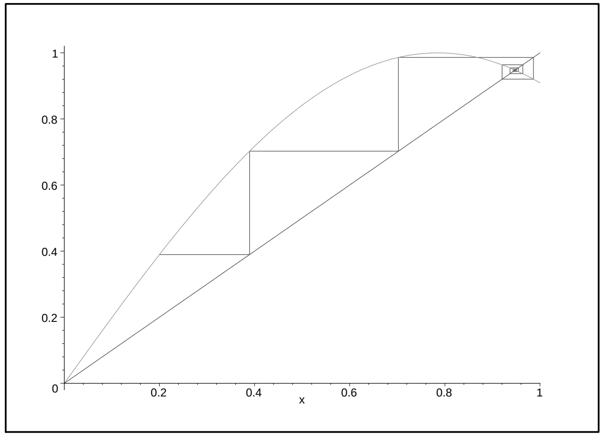
donc

$$(1 - k)N(x - x') \leq 0$$

Comme $1-k > 0$, cela impose $N(x-x') \leq 0$ donc $N(x-x') = 0$ *ie* $x = x'$. $\square$

*Remarque* 13. Le théorème du point fixe est hors programme, il faut donc savoir refaire au coup par coup la preuve ci-dessus.

**Exemple 8.** Suite $u_{n+1} = \sin(2u_n)$




**Graphe de $f$ : $x \mapsto \sin(2x)$ et suite $(u_n)$ avec $u_0 = 0.2$**

L'intervalle $I = [\pi/4, 1]$ est stable par $f$ car $f(1) - \pi/4 \sim 0.1238992633 > 0$. Sur $I$, $|f'(x)| \leq 2|\cos(2)| \sim 0.8322936730 < 1$.

**Exercice 21.** Étudier les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ définies par $x_0$ et $y_0$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}\sin(x_n) - \frac{y_n}{4} + 3 \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{4} + \frac{\cos y_n}{2} + 5 \end{cases}$$

**Exercice 22.** Étudier la suite réelle $(x_n)$ définie par $x_0 \neq 0$ et :

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

**Exercice 23 (CCP 98).** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle qu'il existe $k \in ]0, 1/2[$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ |f(x) - f(y)| \leq k\left[|f(x) - x| + |f(y) - y|\right]$$

montrer que $f$ a un point fixe.

# Chapitre 3

# Vocabulaire topologique

**Sauf mention contraire, tous les espaces qui suivent sont de dimension finie**

## 3.1 Ouverts

**Proposition 12 (Parties ouvertes ).** *Une partie $U \subset E$ est dite* **ouverte** *si elle possède la propriété suivante : pour tout point $x \in U$, il existe un réel $r > 0$ (dépendant du point $x$) tel que $B(x, r) \subset U$. On dit aussi que $U$ est un ouvert de $E$.*

*Remarque* 14. Cette notion ne dépend pas de la norme vu qu'elle sont toutes équivalentes.

**Proposition 13.** *Les boules ouvertes sont des ouverts. Les intervalles "ouverts" de* $\mathbf{R}$ *sont des ouverts.*

*Démonstration.* Soit $R > 0$ et $U = B(a, R)$. Soit $x \in U$ et $r = R - \mathrm{d}(x, a) > 0$. Prouvons (**faire un dessin**) que $B(x, r) \subset U$.
Soit $y \in B(x, r)$. Il vient :

$$\mathrm{d}(y, a) \leq \mathrm{d}(y, x) + \mathrm{d}(x, a) < r + \mathrm{d}(x, a) = R$$

donc $y \in U$ et le résultat en libérant $y$.
Les lecteurs sont invité à prouver qu'un intervalle réel de la forme $]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ est un ouvert de $\mathbf{R}$. □





**Proposition 14.** *Quelques propriétés très générales :*

1. *$E$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $E$.*
2. *Si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une famille* **quelconque** *d'ouverts de $E$ il en est de même de leur réunion définie par :*

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \{x \in E,\ \exists i \in I,\ x \in \Omega_i\}$$

3. *Si $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille* **finie** *d'ouverts de $E$ il en est de même de leur intersection définie par :*

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \Omega_i = \{x \in E,\ \forall i \in [|1, n|],\ x \in \Omega_i\}$$

*Démonstration.* 1. Evident.

2. Posons $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Soit $x \in \Omega$. Par définition de $\Omega$, il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in \Omega_{i_0}$. Comme $\Omega_{i_0}$ est ouvert, il existe un $r > 0$ tel que :

$$B(x, r) \subset \Omega_{i_0} \subset \Omega$$

3. Posons $\Omega = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \Omega_i$. Soit $x \in \Omega$. Par définition de $\Omega$, pour tout $i \in [|1, n|]$, $x \in \Omega_i$. Fixons un tel $i$. Comme $\Omega_i$ est ouvert, il existe un $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset \Omega_i$. Posons alors

$$r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$$

$B(x, r)$ est contenue dans toutes les boules $B(x, r_i)$ donc dans $\Omega$.

□

**Exercice 24.** Donner un exemple d'intersection infinie d'ouverts qui n'en soit pas un.

**Exercice 25.** Soit $U$ un ouvert non vide de $E$, $a$ un point de $E$. Prouver que :

$$a + U = \{a + x,\ x \in U\}$$

est un ouvert. Prouver que si $A$ est une partie quelconque, non vide de $E$ alors :

$$A + U = \{a + x,\ (a, x) \in A \times U\}$$

est un ouvert.

**Définition 12 (Points intérieurs à une partie).** On dit qu'un point $a \in E$ est **intérieur** à une partie $A \subset E$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

**Exercice 26.** Pour se familiariser avec ces notions.

1. Prouver que l'ensemble des points intérieurs à une partie $A$ est un ouvert appelé *l'intérieur de* $A$ [1].
2. Caractériser les ouverts à l'aide de cette notion.
3. Prouver que si $U$ est un ouvert contenu dans $A$ il est contenu dans son intérieur.
4. Déterminer l'intérieur d'un segment, l'intérieur d'une boule fermée.

**Exercice 27.** De la bonne utilisation du critère de Cauchy.
Soit $U$ un ouvert non vide et borné de $E$ tel que, pour tout couple $(x, y)$ de points de $U$, il existe une boule ouverte $B$ vérifiant :

$$\{x, y\} \subset B \subset U$$

on se propose d'établir que $U$ est une boule ouverte.

1. Prouver l'existence de
$$\delta(U) = \sup_{(x,y)\in U\times U} \mathrm{d}(x, y)$$
Montrer que $\delta(U) > 0$ et établir l'existence d'une suite $(x_n)$ et d'une suite $(y_n)$ de points de $U$ telles que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_n, y_n) = \delta(U)$.
2. Justifier l'existence d'un point $a_n \in E$ et d'un réel $r_n > 0$ tels que :
$$\{x_n, y_n\} \subset B(a_n, r_n) \subset U$$
Prouver que la suite $(r_n)$ converge vers un réel $r$ que l'on calculera.
3. Soient $p$ et $q$ deux naturels, montrer que :
$$\mathrm{d}(a_p, a_q) \leq \delta(U) - r_p - r_q$$
en déduire que la suite $(a_n)$ converge vers un élément $a \in E$.
4. Soit $x \in B(a, r)$. En considérant la suite de terme général $r_n - \mathrm{d}(x, a_n)$, prouver que $x \in U$.
5. Démontrer que $U = B(a, r)$

[1] Cette terminologie est explicitement hors programme





## 3.2 Fermés

**Proposition 15.** *Une partie de $E$ est fermée si et seulement si son complémentaire est un ouvert.*

*Démonstration.* Soit $F$ une partie de $E$ séquentiellement fermée au sens vu dans la première partie de ce cours. Prouvons d'abord que $U = E - F$ est un ouvert. Pour cela on va raisonner par contraposition. On va supposer que $U$ n'est pas ouvert et construire une suite $(f_n)$ **convergente** de points de $F$ dont la limite n'est pas dans $F$. Dire que $U$ n'est pas ouvert c'est nier la proposition suivante :

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset U$$

cette négation s'écrit :

$$\exists x \in U,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \not\subset U$$

Choisissons $r_n = \frac{1}{n+1}$. Puisque $B(x, r_n)$ n'est pas contenue dans $U$ c'est qu'il existe au moins un $f_n \in B(x, r_n)$ qui n'appartient pas à $U$ donc qui appartient à $F$. La suite $(f_n)$ est donc une suite d'éléments de $F$ qui converge vers $x \notin F$, ce qu'on voulait.
**Réciproquement :** soit $F$ une partie de $E$ telle que $U = E - F$ soit ouverte. Prouvons qu'elle est séquentiellement fermée. Soit $(f_n)$ une suite d'éléments de $F$ qui converge vers $x \in E$. Prouvons que $x \in F$. Si ce n'était pas le cas, $x$ appartiendrait à $U = E - F$ qui est ouvert. Il existerait donc un réel $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ ; mais alors on aurait $\mathrm{d}(f_n, x) \geq r$ pour tout $n$ et la suite $(f_n)$ ne saurait converger vers $x$. Donc $x \in F$. □

*Remarque* 15. Le point de vue adopté peut paraître iconoclaste. Les puristes définissent en effet les fermés comme les complémentaires des ouverts. Cependant la caractérisation séquentielle est la manière la plus efficace de prouver qu'une partie est fermée **voire ouverte en montrant que son complémentaire est fermée**. Quoiqu'il en soit, **la preuve ci-dessus est au programme et connue en question de cours sous le titre "caractérisation séquentielle des fermés"**

**Exemple 9.** On munit $\mathbf{R}^3$ d'une norme. L'ensemble $U$ défini par :

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^3 - y^2 + \sin xz > 0\}$$

est un ouvert. Il suffit de montrer que son complémentaire $F$ défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^3 - y^2 + \sin xz \leq 0\}$$

est séquentiellement fermé ce qui est facile.

**Exercice 28.** Prouver qu'une boule fermée est un fermé. Une sphère est-t-elle fermée ?

**Proposition 16.** *Quelques propriétés générales obtenues par passage au complémentaire des propriétés décrites dans la proposition 14 :*

1. *$E$ et $\emptyset$ sont des fermés de $E$.*
2. *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille* **quelconque** *de fermés de $E$ il en est de même de leur intersection définie par :*

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E,\ \forall i \in I,\ x \in F_i\}$$

3. *Si $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille* **finie** *de fermés de $E$ il en est de même de leur réunion définie par :*

$$\bigcup_{1\leq i\leq n} F_i = \{x \in E,\ \forall i \in [|1, n|],\ x \in F_i\}$$

**Exercice 29.** Prouver que les intervalles "fermés" de **R** sont fermés. Quelle propriété des suites cela traduit-t-il ?

**Exercice 30.** Soit $(E, N)$ un **K**-espace vectoriel normé, non nécéssairement de dimension finie. Prouver qu'un sous espace $F$, de dimension finie de $E$ est fermé *(On pourra utiliser les suites de Cauchy).*

**Définition 13 (Points adhérents).** On dit qu'un point $x \in E$ est **adhérent** à une partie $A \subset E$ si elle possède l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. $x$ est limite d'une suite de points de $A$.
2. Toute boule ouverte centrée en $x$ rencontre $A$





*Démonstration.* Supposons la propriété 1 satisfaite. On peut écrire $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ où les $a_n$ appartiennent à $A$. Soit $r > 0$, il existe un rang $N$ tel que :

$$n > N \Rightarrow \mathrm{d}(a_n, x) < r$$

Donc, si $n > N$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ puisqu'il contient $a_n$.
**Réciproquement :** supposons la propriété 2 vérifiée. On choisit $r_n = \frac{1}{n+1}$ $B(x, r_n) \cap A \neq \emptyset$ par hypothèse. On choisit un point de cet ensemble, noté $a_n$. La suite $(a_n)$ est une suite de points de $A$ qui tend vers $x$ puisque, pour tout $n$, $\mathrm{d}(x, a_n) < r_n \to 0$. □

**Proposition 17.** *Tout point adhérent à un fermé $F$ appartient à $F$.*

*Démonstration.* Si $x$ est adhérent à $F$, il est limite d'une suite de points de $F$, il appartient donc à $F$ puisque celui-ci est fermé. □

**Proposition 18.** *Soit $A$ une partie de* **R** *non vide et majorée, alors* $\sup A$ *est adhérent à $A$. En particulier, si $A$ est fermé, il contient sa borne supérieure. Résultats analogues avec la borne inférieure d'une partie non vide et minorée.*

*Démonstration.* On sait que $A$ admet une borne supérieure $M$. Si $n \in \mathbf{N}$, $x_n = M - \frac{1}{n+1} < M$ ne majore plus $A$ donc il existe un $a_n \in A$ tel que $a_n > x_n$. Comme $x_n < a_n \leq M$, la suite $(a_n)$ est une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$ qui est donc adhérent à $A$. La proposition précédente permet d'établir que si $A$ est fermé, non vide, majoré, $\sup A \in A$. □

**Exercice 31.** On appelle *adhérence* de $A$ l'ensemble de ses points adhérents [2].

1. Prouver que c'est un fermé qui contient $A$.
2. Prouver que tout fermé qui contient $A$ contient son adhérence.
3. Caractériser les fermés à l'aide de cette notion.
4. Déterminer l'adhérence d'une boule ouverte.
5. Déterminer l'adhérence de

$$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ xy > 1\}$$

[2] définition hors programme mais quand même utilisée à certains concours

## 3.3 Compacts

**Définition 14.** Une partie $K \subset E$ est dite **compacte** si elle possède l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. $K$ est fermée et bornée.
2. De toute suite d'éléments de $K$ on peut extraire une suite qui converge **ver un élément de $K$.** (Propriété de Bolzano-Weierstrass)

*Démonstration.* Supposons la propriété 1 satisfaite. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $K$. Comme $K$ est bornée, la suite $(x_n)$ aussi et on peut en extraire une suite convergente $(x_{\phi(n)})$. Soit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\phi(n)}$, $x$ est limite d'une suite d'éléments de $K$ qui est, par hypothèse, fermé donc $x \in K$.
**Réciproquement :** supposons satisfaite la propriété de Bolzano-Weierstrass. Prouvons d'abord que $K$ est fermé. Soit $(x_n)$ une suite convergente d'éléments de $K$. Posons $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. On peut extraire de la suite $(x_n)$ une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $y \in K$. Or la suite $(x_{\phi(n)})$ est une sous suite de la suite $(x_n)$ qui converge vers $x$, elle converge donc aussi vers $x$. L'unicité de la limite de la suite $(x_{\phi(n)})$ assure $x = y \in K$.
Prouvons maintenant que $K$ est borné. S'il ne l'était pas, il existerait une suite $(x_n)$ d'éléments de $K$ telle que $N(x_n) > n$ pour tout $n$. Pour toute extraction $\phi$, il viendrait $N(x_{\phi(n)}) > \phi(n) \geq n$ ; on ne saurait donc extraire de $(x_{\phi(n)})$ une suite convergente puisque la suite $N(x_{\phi(n)})$ tend vers $+\infty$. □

**Exemple 10.** Les points de $E$, les parties finies, les segments de $\mathbf{R}$, les boules fermées, les sphères, les réunion finies de compacts *etc.* sont des compacts.

**Exercice 32.** Soit $(x_n)$ une suite convergente d'éléments de $E$. Si $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ prouver que l'ensemble :

$$\{x_n,\, n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$$

est compact.

**Exercice 33.** Soit $F$ un fermé et $K$ un compact non vides, prouver que $F + K$ est fermé. Montrer, *via* un contre-exemple que c'est faux si on suppose simplement $K$ fermé.

**Proposition 19.** *Les compacts non vides de* $\mathbf{R}$ *ont un plus grand et un plus petit élément.*





*Démonstration.* En effet un tel compact possède une borne supérieure et une borne inférieure puisqu'il est non vide et borné. Il contient ces bornes car il est fermé. □

Enfin, pour mémoire, une définition et un résultat **hors programme** déja vus dans l'exercice 34 mais utiles dans beaucoup de situations théoriques. *[cf plus loin les les exercices 51 et 63. ]*

**Proposition 20.** *On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)$ d'éléments d'un* **K***-espace vectoriel normé $E$ de dimension finie tout élément $x$ de $E$ tel qu'existe une sous suite $(x_{\phi(n)})$ de $(x_n)$ qui converge vers $x$. Si une suite* **bornée** *de $E$ ne possède qu'une valeur d'adhérence elle converge vers icelle.*

*Démonstration.* Soit $x$ cette unique valeur d'adhérence. Supposons que $(x_n)$ ne converge pas vers $x$, alors :

$$\exists \epsilon > 0 \;/\; \forall p \in \mathbf{N},\ \exists n > p \;/\; N(x_n - x) \geq \epsilon$$

On construit alors par récurrence une sous suite $(x_{\theta(n)})$ de $(x_n)$ telle que, pour tout $n$, $N(x_{\theta(n)} - x) \geq \epsilon$. D'après Bolzano-Weierstrass, on peut réextraire de la suite $(x_{\theta(n)})$ une suite $(x_{\theta\circ\sigma(n)})$ qui converge vers $y$ tel que $N(y - x) \geq \epsilon$. $y$ serait une valeur d'adhérence de $(x_n)$ distincte de $x$ ce qui n'est pas. □

**Exercice 34.** Montrer que, si une suite bornée $(x_n)$ est divergente, on peut trouver au moins deux sous suites de $(x_n)$ qui convergent vers des limites différentes. Quelle conséquence méthodologique peut-on en tirer ?

**Exercice 35 (Mines).** Soit $(x_n)$ une suite réelle bornée. $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles qui convergent vers des limites $u$ et $v$ avec $v \neq 0$ et $\frac{u}{v}$ irrationnel.On suppose que les suites $(\mathrm{e}^{ix_n u_n})$ et $(\mathrm{e}^{ix_n v_n})$ convergent.Montrer que $(x_n)$ converge.

**Exercice 36 (X).** Soit $f$ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On pose :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\ ,\ x \in \mathbf{R}\}$$

Prouver que si $f$ est bornée, $f$ est continue si et seulement si $\Gamma_f$ est un fermé de $\mathbf{R}^2$ pour sa topologie usuelle. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus que $f$ est bornée ?

**Exercice 37 (Ens).** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n - u_n^2 = 0$$

1. Montrer que, si $(u_n)$ n'est pas majorée elle tend vers $+\infty$.
2. On suppose $(u_n)$ majorée et on note $X$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $X$. Montrer que $f(X) = X$ où $f$ est l'application $x \mapsto x + x^2$. Prouver que $(u_n)$ converge vers 0.

# Chapitre 4

# Étude locale d'une application

- Les applications étudiées dans la suite sont définies sur une partie $A$ d'un **K**-Espace vectoriel normé $(E, || \quad ||)$, de dimension finie, et à valeurs dans un autre $(F, || \quad ||)$.
- On dira qu'une propriété portant sur une fonction $f$ définie sur une partie $A$ d'un espace vectoriel normé $E$ de dimension finie est vraie *au voisinage d'un point a* si elle est vraie :
  - Sur l'intersection avec $A$ d'une boule de centre $a$ lorsque $a$ est un point de $E$ adhérent à $A$.
  - Sur l'intersection avec $A$ d'un intervalle de la forme $]c, +\infty[$ lorque $E = \mathbf{R}$ et $a = +\infty$.
  - Sur l'intersection avec $A$ d'un intervalle de la forme $]-\infty, c[$ lorque $E = \mathbf{R}$ et $a = -\infty$.

## 4.1 Limite en un point, continuité en un point

**Définition 15 (Limite en un point).** Soit $f$ une application d'une partie $A$ de $E$, à valeurs dans $F$ et $a$ un point de $E$ **adhérent à** $A$. Etant donné un élément $b$ de $f$, on dit que $f$ admet $b$ comme limite au point $a$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Si un tel $b$ existe, il est unique, on dit que $f$ admet une limite au point $a$ et on note :

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{ou bien} \qquad b = \lim_a f$$





*Démonstration.* Prouvons l'unicité de $b$. Supposons que $b$ et $b'$ satisfassent aux propriétés ci-dessus. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que :

$$(1) \quad \forall x \in A,\ ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \frac{\epsilon}{2}$$

et :

$$(1') \quad \forall x \in A,\ ||x - a|| < \delta' \Rightarrow ||f(x) - b'|| < \frac{\epsilon}{2}$$

Soit $\delta" = \min(\delta, \delta') > 0$. **comme** $a$ **est adhérent à** $A$, la boule $B(a, \delta")$ rencontre $A$. On peut donc choisir un $x$ dans $B(a, \delta") \cap A$ ; pour un tel $x$, les deuxièmes membres de (1) et (1′) sont simultanément vérifiés donc :

$$||b - b'|| \leq ||b - f(x)|| + ||f(x) - b'|| < \epsilon$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il vient $||b' - b|| < \epsilon$, ce qui impose $b' = b$. □

*Remarque* 16. **Le fait que $a$ soit adhérent à $A$ est essentiel dans l'unicité de la limite. C'est faux sinon**

*Remarque* 17. L'existence et la valeur de la limite ne dépendent pas de la norme en dimension finie.

*Remarque* 18. Les inégalités autres que $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ peuvent être élargies.

*Remarque* 19. Si $N$ est une norme quelconque sur $E$, $\lim_0 N(x) = 0$.

**Définition 16.** On dit que $+\infty$ *(resp $-\infty$)* est adhérent à une partie $A$ de $\mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $c \in \mathbf{R}$, $A \cap ]c, +\infty[ \neq \emptyset$ *(resp $A \cap ]-\infty, c[ \neq \emptyset$).*

**Définition 17 (Limite en $\pm\infty$).** Soit $f$ une application d'une partie $A$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $F$. On suppose que $+\infty$ **est adhérent à** $A$. Etant donné un élément $b$ de $f$, on dit que $f$ admet $b$ comme limite au point $+\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \lambda,\ \forall x \in A,\ x > \lambda \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Si un tel $b$ existe, il est unique, on dit que $f$ admet une limite au point $+\infty$ et on note :

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{ou bien} \qquad b = \lim_{+\infty} f$$

Définition analogue en $-\infty$.

**Définition 18 (Limite infinie des fonctions à valeurs réelles).** Soit $f$ une application d'une partie $A$ de $E$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $a$ un point de $E$ **adhérent à** $A$. On dit que $f$ admet $+\infty$ *(resp* $-\infty$*)* comme limite au point $a$ si :

$$\forall \mu \in \mathbf{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a|| < \delta \Rightarrow f(x) > \mu \qquad (\mathit{resp}\ f(x) < \mu)$$

On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou bien} \qquad \lim_{a} f = +\infty$$

*(resp* $-\infty$*)*

**Définition 19 (Continuité locale).** Soit $f$ une application d'une partie $A$ de $E$, à valeurs dans $F$ et $a$ un point **appartenant à** $A$. On dit que $f$ est **continue** au point $a$ si et seulement si elle admet une limite en ce point ; cette limite vaut nécessairement $f(a)$.

*Démonstration.* Si $a \in A$, $a$ est, en particulier, adhérent à $A$. Supposons que $f$ ait une limite $b$ au point $a$ et soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap A,\ ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Si on prend $x = a \in B(a, \delta) \cap A$, il vient $||f(a) - b|| < \epsilon$. Comme c'est vérifié pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit $b = f(a)$. $\square$

**Exemple 11.** Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de $E$ et $(\pi_i)$ le système des formes coordonnées dans la base $E$. On a vu qu'il existait $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ |\pi_i(x)| \leq k\,||x||$$

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$ ; pour $x, y$ dans $E$ :

$$|\pi_i(y) - \pi_i(x)| \leq ||y - x||$$

Ce qui prouve la continuité de $\pi_i$ en tout point de $E$.

**Proposition 21 (Prolongement par continuité en un point).** *Soit $f$ une application d'une partie $B \subset E$ dans $F$. Soit $a$ un point de $E$, adhérent à $B$ mais n'appartenant pas à $B$. Une condition nécessaire pour que $f$ admette un prolongement à $A = B \cup \{a\}$, continu en $a$ est que $f$ admette une limite en $a$. Le prolongement par continuité de $f$ en $a$ est alors unique.*





## 4.2 Propriétés

### 4.2.1 Signe d'une fonction à valeurs réelles admettant une limite non nulle

**Proposition 22.** *Soit $f$ une application de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$, $a$ un point adhérent à $A$. On suppose que $\lim_a f = b \in ]0, +\infty]$. Alors $f$ est minorée par un réel strictement positif au voisinage de $a$.*

*Démonstration.* **Faire la preuve dans le cas $E = \mathbf{R}$ avec un dessin.** Posons $c = b/2$ si $b \in \mathbf{R}$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in A \cap B(a, \delta)$ on ait $|f(x) - b| < b/2$ d'où $b/2 < f(x) < 3b/2$. Les lecteurs traiteront le cas $b = +\infty$. $\square$

*Remarque* 20. S'étend sans changement lorsque $E = \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$.

### 4.2.2 Caractérisation séquentielle

**Proposition 23.** *Soit $f$ une application de $A \subset E$ dans $F$, $a$ un point adhérent à $A$, $b$ un élément de $F$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ ait pour limite $b$ au point $a$ est que pour toute suite $(a_n)$ d'éléments de $A$ qui converge vers $a$, la suite $(f(a_n))$ converge vers $b$.*

*Démonstration.* Supposons d'abord $\lim_a f = b$ et soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $a$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \cap B(x, \delta),\ ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Comme $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow ||a_n - a|| < \delta$$

donc, pour $n > n_0$, $||f(a_n) - b|| < \epsilon$. La suite $(f(a_n))$ converge donc vers $b$.
**Réciproquement :** prouvons plutôt la contraposée de la réciproque. Supposons que $f$ n'ait pas $b$ comme limite au point $a$. Cela se traduit par :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in A,\ ||x - a|| < \delta \text{ et } ||f(x) - b|| \geq \epsilon$$

En choisissant $\delta_n = \frac{1}{n+1}$, on met ainsi en évidence un $a_n \in A$ tel que $||a_n - a|| < \delta_n$ et $||f(a_n) - b|| \geq \epsilon$. La suite $(a_n)$ converge donc vers $a$ alors que la suite $(f(a_n))$ ne peut converger vers $b$. $\square$

*Remarque* 21. Les lecteurs étendront ce résultat au cas des limites infinies au départ ou à l'arrivée et formuleront la caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point.

**Exercice 38.** Avec les notations précédentes, prouver que $\lim_a f$ est un point adhérent à $f(A)$.

**Exercice 39.** La fonction $f$ définie pour $x \neq y$ par :

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sh}(x) - \sin y}{e^x - e^y}$$

admet-t-elle une limite en $(0,0)$ ?

### 4.2.3 Propriétés d'encadrement

**Proposition 24 (Convergence par encadrement).** *Soient $f$, $g$, $h$ trois applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que :*
- *Au voisinage de $a$ on ait : $g \leq f \leq h$.*
- *$\lim_a g = \lim_a h = b \in \mathbf{R}$*

*Alors $f$ admet au point $a$ une limite égale à $b$.*
*En particulier si $f : A \to F$, $l \in F$ et $||f(x) - l|| \leq g$ au voisinage de $a$ où $g$ est une application de $A$ dans $\mathbf{R}$, de limite nulle en $a$, alors $f$ admet au point $a$ une limite égale à $l$.*

*Démonstration.* Il existe un $r > 0$ tel que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur $A \cap B(a,r)$. Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $a$. A partir d'un certain rang $n_0$, on a :

$$a_n \in A \cap B(a,r) \quad \text{donc} \quad g(a_n) \leq f(a_n) \leq h(a_n)$$

D'après le théorème de convergence par encadrement pour les suites, il vient $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$. Le résultat découle de la caractérisation séquentielle de la limite. □

**Exemple 12.** $E = \mathbf{R}^2$ muni d'une norme, $A = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$. Soit $f$ l'application de $A$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$





En utilisant les coordonnées polaires, il vient, pour $(x,y) \in A$ :

$$|f(x,y)| \leq 2\,||(x,y)||_2$$

Donc $\lim_{(0,0)} f = 0$.

**Exercice 40.** Reprendre le précédent avec

$$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2 + |y|^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

**Proposition 25.** *Soient $f$ et $g$ deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que :*
- *Au voisinage de $a$ on ait : $g \leq f$.*
- *$\lim_a g = +\infty$*

*Alors $f$ admet au point $a$ une limite égale à $+\infty$.*

*Démonstration.* Démonstration analogue à la précédente. □

**Proposition 26 (Passage d'inégalités à la limite).** *Soient $f$ et $g$ deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que :*
- *Au voisinage de $a$ on ait : $g \leq f$.*
- *$f$ et $g$ admettent, au point $a$, des limites $l$ et $l'$ appartenant à $\overline{\mathbf{R}}$.*

*Alors $l \leq l'$.*

*Démonstration.* Soit $(a_n)$ une suite de points de $A$ qui converge vers $a$, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$, $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = l'$ et, à partir d'un certain rang $f(a_n) \leq g(a_n)$. On en déduit $l \leq l'$ en vertu du passage de l'inégalité à la limite pour les suites réelles. □

*Remarque* 22. On étendra ces résultats au cas où l'espace de départ est $\mathbf{R}$ et $a = \pm\infty$.

### 4.2.4 Composition des limites

**Proposition 27.** *Soient $E$, $F$, $G$ trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $A$ une partie de $E$, $B$ une partie de $F$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$ et $b$ un point de $F$ adhérent à $B$. On considère une application $f : A \to F$ et une application $g : B \to G$. On suppose que :*

- $f(A) \subset B$.
- $\lim_a f = b$ *et* $\lim_b g = c \in G$.

*Alors*

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$$

*Démonstration.* Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $a$, la suite $(f(a_n))$ est une suite d'éléments de $f(A) \subset B$ qui converge vers $b$. La suite de terme général $g(f(a_n))$ converge donc vers $c$. On en déduit $\lim_a g \circ f = c$ en vertu de la caractérisation séquentielle de la limite. □

*Remarque* 23. Les lecteurs étendront ce résultat au cas où certaines de ces limites sont infinies.

### 4.2.5 Opérations algébriques sur les limites

**Proposition 28 (Somme).** *Soit $f$ et $g$ deux applications de $A \subset E$ dans $F$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que :*

$$\lim_a f = l \qquad et \qquad \lim_a g = l'$$

*alors $f + g$ admet au point $a$ une limite égale à $l + l'$.*

*Démonstration.* Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $a$, la suite $(f(a_n))$ tend vers $l$, la suite $(g(a_n))$ tend vers $l'$ donc $\lim_{n\to\infty} f(a_n)+g(a_n) = l + l'$ et le résultat grace à la caractérisation séquentielle de la limite. □

**Proposition 29 (Cas d'une limite infinie).** *Soit $f$ et $g$ deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que :*

$$\lim_a f = +\infty \qquad \text{et } g \text{ minorée au voisinage de } a$$

*alors la fonction $f + g$ admet au point $a$ la limite $+\infty$. Résultat analogue en remplaçant "minorée" par "majorée" et $+\infty$ par $-\infty$.*

*Démonstration.* On reprend les termes de la preuve précédente en remarquant qu'il existe $r > 0$ telle que $g$ soit minorée sur $A \cap B(a, r)$. A partir d'un cetain rang $n_0$, $a_n \in A \cap B(a, r)$ donc la suite $(g(a_n))_{n \geq n_0}$ est minorée d'où $\lim_{n\to\infty} f(a_n) + g(a_n) = +\infty$. □





**Proposition 30 (Produit par une fonction scalaire).** *Soit $f$ une applications de $A \subset E$ dans $F$ et $\lambda$ une application de $A$ dans $\mathbf{K}$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que :*

$$\lim_a f = l \qquad et \qquad \lim_a \lambda = \alpha$$

*alors l'application $\lambda f$ admet au point $a$ une limite égale à $\alpha l$.*

*Démonstration.* Même preuve à l'aide de la caractérisation séquentielle de la limite. □

**Proposition 31 (Cas d'une limite infinie).** *Soit $f$ et $g$ deux applications de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que :*

$$\lim_a f = +\infty$$

*et que $g$ est minorée par une constante strictement positive au voisinage de $a$ (c'est le cas, en particulier lorsque $\lim_a g = l \in ]0, +\infty]$). alors la fonction $fg$ admet au point $a$ la limite $+\infty$.*
*Résultat analogue en remplaçant "minorée" par "majorée", $+\infty$ par $-\infty$ et "positive" par "négative".*

*Démonstration.* Analogue aux précédentes. □

**Proposition 32 (Inverse d'une fonction scalaire).** *Soit $f$ une application de $A \subset E$ dans $\mathbf{K}$. Soit $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. On suppose que $f$ ne s'annule pas sur $A$ et que $\lim_a f = b$ avec $b \in \mathbf{K}$ ou $b \in \overline{\mathbf{R}}$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.*
*Alors :*

- *Si $b \neq 0$, $1/f$ admet, au point $a$, la limite $1/b$.*
- *Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $b = 0$ et $f > 0$ (resp $< 0$) au voisinage de $a$, $1/f$ admet, au point $a$, la limite $+\infty$ (resp $-\infty$).*
- *Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $b = \pm\infty$, $1/f$ admet, au point $a$, la limite $0$.*

*Démonstration.* Analogue aux précédentes. □

**Proposition 33 (Passage aux coordonnées).** *Soit $f$ une application de $A \subset E$ dans $F$ et $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. Soit $(e) = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de $F$ et $(\pi_i)_{1 \leq i \leq p}$ le système des formes coordonnées associées. Posons $f_i = \pi_i \circ f$, de sorte que, pour $x \in E$ :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, e_i$$

*Soit* $b = \sum_{i=1}^{p} b_i e_i$ *un vecteur de* $E$*. Alors* $\lim_a f(x) = b$ *si et seulement si, pour tout* $i \in [|1, p|]$, $\lim_a f_i(x) = b_i$

*Démonstration.* Si $\lim_a f(x) = b$. On sait que $\pi_i$ est continue en $b$ ; d'après le théorème de composition des limites, il vient :

$$\lim f_i(x) = \pi_i(b) = b_i$$

**Réciproquement :** si, pour tout $i \in [|1, p|]$, on a $\lim f_i(x) = b_i$, alors la fonction $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i$ admet pour limite au point $a$ $\sum_{i=1}^{p} b_i e_i = b$ en vertu des propriétés opératoires ci-dessus. □

*Remarque* 24. Il en résulte qu'on peut toujours ramener l'étude du comportement, au voisinage d'un point, d'une application à valeurs dans $F$ à celle de fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}$.

*Remarque* 25. Les lecteurs étendront tous ces résultats au cas où l'espace de départ est $\mathbf{R}$ et $a = \pm\infty$.

### 4.2.6 Restrictions et prolongements

**Proposition 34 (Restriction).** *Soit* $f$ *une application de* $A \subset E$ *dans* $F$*. Soit* $B \subset A$ *et* $a$ *un point de* $E$ *adhérent à* $B$*. Alors* $a$ *est adhérent à* $A$ *et si* $\lim_a f = b \in F$ *alors* $\lim_a f_{|B} = b$*. La réciproque est fausse en général*

*Démonstration.* Immédiat avec les caractérisations séquentielle des points adhérents et des limites. Un contre exemple à la réciproque est donné par : $A = \mathbf{R}$, $B = [0, +\infty[$, $a = 0$, $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

**Exemple 13.** On va donner un exemple d'application $f$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ qui tend vers 0 dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais qui ne tend pas vers 0 en $(0, 0)$. Posons :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$





Soit $D$ une droite passant par $(0, 0)$ et $g = f_{|D}$ alors :

$$\lim_{(0,0)} g = 0$$

Cependant $f$ n'a pas de limite en $(0, 0)$.

*Démonstration.* Si $D$ est l'axe $Oy$, $g$ est la fonction nulle et le résultat est clair. Sinon, soit $\theta$ l'angle que fait $D$ avec $Ox$, un passage en polaire donne, si $\rho \neq 0$ :

$$g(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = \rho \frac{\sin^2\theta}{2 \cos\theta}$$

Donc, pour tout réel $\rho$ :

$$|g(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)| \leq \frac{\sin^2\theta}{2\,|\cos\theta|} |\rho|$$

D'où, en revenant aux coordonnées usuelles :

$$\forall (x, y) \in D, \ |g(x, y)| \leq \frac{\sin^2\theta}{2\,|\cos\theta|} ||(x, y)||_2$$

Le théorème de convergence par encadrement assure alors que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$$

Les lecteurs prouveront que $f$ ne tend pas vers 0 en $(0, 0)$. □

**Proposition 35 (Limite suivant une réunion).** *Soit* $f$ *une application de* $A \subset E$ *dans* $F$*. On suppose* $A = B \cup C$ *et soit* $a$ *un point adhérent à* $B$ *et à* $C$*. Si les fonctions* $f_{|B}$ *et* $f_{|C}$ *ont pour limite* $b$ *au point* $a$*, il en est de même de* $f$*.*

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$(1) \quad \forall x \in B, \ ||x - a|| < \alpha \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

$$(2) \quad \forall x \in C, \ ||x - a|| < \beta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Soit $\delta = \min(\alpha, \beta) > 0$ et $x \in A \cap B(a, \delta)$. Si $x \in B$, (1) entraine $||f(x) - b|| < \epsilon$, si $x \in C$, (2) fournit la même conclusion donc $\lim_a f = b$. □

**Exemple 14 (Limites latérales).** Soit $f$ une application d'un intervalle réel $I$ dans $F$, $a$ un point intérieur à $I$. On dit que $f$ admet $b$ comme limite à gauche au point $a$ si la fonction $f_{|]-\infty,a[\cap I}$ admet $b$ comme limite en $a$ On note :

$$b = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad b = f(a^-) \quad \text{ou} \quad b = f(a-0)$$

Définition analogue pour la limite à droite en $a$.
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$ admet $b$ comme limite à gauche et à droite au point $a$.
- La restriction $g = f_{I-\{a\}}$ admet $b$ comme limite au point $a$.

En particulier $f$ est continue au point $a$ si et seulement si elle admet, au point $a$, des limites latérales égales à $f(a)$.

*Démonstration.* Cela résulte des résultats sur la limite d'une restriction et la limite suivant une réunion puisque $I-\{a\} = (I\cap]-\infty,a[)\cup(I\cap]a,+\infty[)$ □

**Exercice 41.** Soit $a \in U \subset A$ et $U$ ouvert, $f : A \to F$. Prouver l'équivalence de :

- $f$ continue au point $a$.
- $f_{|U}$ continue au point $a$.

Prouver que la fonction max : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est continue en tout point de $\mathbf{R}^2$.

# Chapitre 5

# Aspects globaux de la continuité

**Définition 20.** Une application $f : A \to F$ est dite continue sur $A$ si elle est continue en tout point de $A$. Leur ensemble est noté $\mathcal{C}(A, F)$ ou, plus simplement, $\mathcal{C}(A)$ si $F = \mathbf{K}$.

**Exemple 15.** Les applications lipschitziennes sur $A$ y sont continues. Les formes coordonnées dans une base également.

## 5.1 Propriétés générales

### 5.1.1 Composition

**Proposition 36.** *Soient $E$, $F$, $G$ trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $A$ une partie de $E$, $B$ une partie de $F$. On considère une application $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et une application $g \in \mathcal{C}(B, G)$. On suppose que $f(A) \subset B$ alors $h = g \circ f \in \mathcal{C}(A, G)$.*

*Démonstration.* Découle du théorème de composition des limites. □

### 5.1.2 Propriétés algébriques

**Proposition 37 (Combinaison linéaire).** *Si $f$ et $g$ appartiennent à $\mathcal{C}(A, F)$ et si $\alpha$ et $\beta$ sont des scalaires, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}(A, F)$. En particulier $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.*





*Démonstration.* Résulte des propriétés opératoires des limites. □

**Proposition 38.** *Si $\lambda \in \mathcal{C}(A)$ et $f \in \mathcal{C}(A, F)$, $\lambda f \in \mathcal{C}(A, F)$. En particulier $\mathcal{C}(A)$ est une sous algèbre unitaire de $\mathcal{F}(A, \mathbf{K})$.*

*Démonstration.* Même preuve. □

**Proposition 39 (Inverse).** *Si $f \in \mathcal{C}(A)$ ne s'annule pas sur $A$, $1/f \in \mathcal{C}(A)$.*

*Démonstration.* Preuve identique. □

**Proposition 40 (Passage aux coordonnées).** *Soit $f$ une application de $A \subset E$ dans $F$ . Soit $(e) = (e_i)_{1 \le i \le p}$ une base de $F$ et $(\pi_i)_{1 \le i \le p}$ le système des formes coordonnées associées. Posons $f_i = \pi_i \circ f$. Alors $f \in \mathcal{C}(A, F)$ si et seulement si, pour tout $i \in [|1, p|]$, $f_i \in \mathcal{C}(A)$.*

*Démonstration.* Découle de la caractérisation de la limite d'une fonction par passage aux coordonnées. □

### 5.1.3 Restrictions, prolongements

**Proposition 41.** *Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$, $B \subset A$, alors $f_{|B} \in \mathcal{C}(B, F)$. On remarquera, inversement que si $f$ est une application de $A$ dans $F$ telle que $f_{|B}$ soit continue sur $B$, $f$ n'est pas nécessairement continue en un point $a \in B$.*

**Exercice 42.** Prouver qu'une fonction $k$-lipschitzienne de $A$ dans $F$ se prolonge en une fonction $k$-lipschitzienne sur l'adhérence de $A$.

**Exercice 43.** Soit $f$ une application d'une partie $A \subset E$ dans un espace vectoriel normé $F$. On suppose que pour tout compact $K \subset A$, $f_{|K}$ est continue sur $K$. Montrer que $f$ est continue sur $A$.

### 5.1.4 Prouver la continuité d'une fonction

*cf cours sur l'interversion de symboles*

**Exemple 16.** Étude d'un prolongement continu de la fonction $(x, y) \mapsto x^y$.

**Exercice 44.** Étudier les points de continuité des fonctions suivantes et si elle peuvent se prolonger par continuité à des domaines plus grand que leur domaine de définition :

$$f(x, y) = \frac{x \sin x + y \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad f(x, y) = \frac{x \sin x + y \sin y}{x^2 + y^2}$$

$$f(x,y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} \qquad \alpha > 0$$

**Exercice 45.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, peut-t-on prolonger la fonction $\phi$, définie pour $x \neq y$ par :

$$\phi(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

en une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ ?

## 5.2 Propriétés topologiques

### 5.2.1 Image réciproque d'ouverts et de fermés

**Proposition 42.** *Soit $f \in \mathcal{C}(E,\mathbf{K})$, $U$ un ouvert (resp un fermé) de $\mathbf{K}$. L'image réciproque de $U$ par $f$ définie par :*

$$f^{-1}(U) = \{x \in E,\ f(x) \in U\}$$

*est un ouvert (resp un fermé) de $E$. En particulier, si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, les ensembles suivants sont ouverts dans $E$ :*

- $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \{x \in E,\ f(x) > \alpha\}$
- $f^{-1}(]-\infty,\alpha[) = \{x \in E,\ f(x) < \alpha\}$

*Les parties suivantes de $E$ sont des fermés :*

- $f^{-1}([\alpha,+\infty[) = \{x \in E,\ f(x) \geq \alpha\}$
- $f^{-1}(]-\infty,\alpha]) = \{x \in E,\ f(x) \leq \alpha\}$
- $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in E,\ f(x) = \alpha\}$

*Démonstration.* Soit $a \in f^{-1}(U)$ *ie* $f(a) \in U$. Comme $U$ est un ouvert de $\mathbf{K}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f(a),\epsilon) \subset U$. Par continuité de $f$ au point $a$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$||x-a|| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

Donc, si $x \in B(a,\delta)$, $f(x) \in B(f(a),\epsilon) \subset U$. Il en résulte que $B(a,\delta) \subset f^{-1}(U)$ qui est donc un ouvert puisque $a$ est quelconque.
Le cas des fermés s'obtient par passage au complémentaire puisque :

$$f^{-1}(\mathbf{K}-F) = E - f^{-1}(F)$$

□





**Exemple 17.** L'ensemble $U$ des points de $\mathbf{R}^3$ vérifiant :

$$x^3 + 2y^2 - xyz > 0$$

est un ouvert puisque c'est l'image réciproque de $]0,+\infty[$ par l'application continue $f$ de $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3+2y^2-xyz$.

*Remarque* 26. **On ne peut rien dire de l'image directe d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue**. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$f(\mathbf{R}) = ]0,1]$ qui n'est ni ouvert ni fermé.

**Exercice 46.** Prouver que les parties de $E$ à la fois ouvertes et fermées sont $E$ et $\emptyset$ (commencer par $E = \mathbf{R}$).

**Exercice 47 (ENS).** Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels $\geq 0$. Soient $v_1,\dots,v_n$ des réels distincts. Pour $z \in \mathbf{C} - \{v_1,\dots,v_n\}$, on pose :

$$\phi(z) = z + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{z-v_i}$$

1. Montrer que :

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,\phi(z) > 0\}$$

est un ouvert de $\mathbf{C}$. Déterminer son adhérence $\overline{\Omega}$ *sic*.

2. Montrer que $\phi$ est injective sur $\Omega$. Est-ce encore vrai sur $\overline{\Omega}$ ?

### 5.2.2 Image d'une partie compacte

**Proposition 43.** *Soit $f \in \mathcal{C}(A,F)$, l'image par $f$ d'une partie compacte incluse dans $A$ est une partie compacte de $F$.*

*Démonstration.* Soit $K \subset A$ un compact. Prouvons la compacité de $f(K)$ *via* la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $(y_n)$ une suite d'éléments de $f(K)$. Il existe un $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. On peut extraire de la suite $(x_n)$

une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. Par continuité de $f$ en $x$, il vient $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(x) \in K$, donc :

$$\lim_{n\to\infty} y_{\phi(n)} = f(x) \in K$$

On a extrait, de toute suite d'éléments de $f(K)$ une suite qui converge vers un élément de $f(K)$ lequel est donc compact. □

**Corollaire 1.** *Soit $f$ une application continue d'une partie $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. Si $K$ est une partie compacte de $E$ incluse dans $A$, le théorème précédent assure que $f(K)$ est un compact de $\mathbf{R}$ qui a donc un plus grand et un plus petit élément.* $f$ **est donc bornée sur** $K$ **et y atteint ses bornes**. *Ce résultat généralise celui déja vu pour les fonctions à valeurs réelles continues sur un segment.*

**Exercice 48 (X).** Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, on notera $A \geq 0$ si tous les coefficients de $A$ sont positifs et $A > 0$ si tous les coefficients de $A$ sont strictement positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A > 0$.

1. Montrer que :

$$\left\{\mu \geq 0 \;/\; \exists X \in \mathbf{R}_+^n - \{0\} \;/\; AX \geq \mu\, X\right\}$$

admet un plus grand élément $\rho$.

2. Prouver que $\rho \in \mathrm{Sp}(A)$ et que, pour toute autre valeur propre complexe $\lambda$ de $A$, $|\lambda| \leq \rho$.

**Exercice 49.** Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ une suite croissante de réels et $r$ un entier naturel compris entre 1 et $n$.

1. En commençant par le cas où les inégalités ci-dessus sont strictes, établir que, si $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifie

$$\forall i \in [|1, n|],\ 0 \leq s_i \leq 1 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{n} s_i = r$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s_i \leq \sum_{i=1}^{r} \lambda_{n-r+i}$$





2. Soit $(E, <\ ,\ >)$ un espace euclidien de dimension $n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. En commençant par le cas où $u \in \mathcal{S}(E)$, trouver les bornes de l'expression :

$$\sum_{i=1}^{r} \langle x_i, u(x_i)\rangle$$

Lorsque $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ décrit l'ensemble des familles orthonormales de $r$ vecteurs de $E$.

3. Même question avec $u \in \mathcal{S}^+(E)$ et l'expression :

$$\prod_{i=1}^{r} \langle x_i, u(x_i)\rangle$$

*[On pourra se ramener au cas où $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ en introduisant l'endomorphisme $u + \varepsilon\,\mathrm{Id}$, $\varepsilon > 0$].*

**Exercice 50.** -

1. Soit $F$ un sous espace de dimension finie d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé $E$. Prouver l'existence d'un vecteur unitaire $u \in E$ tel que :

$$\forall x \in F,\ ||x - u|| \geq 1$$

2. (Mines 2000) On suppose que la sphère unité d'un $\mathbf{R}$-espace de dimension $n$ est recouvert par $n$ boules fermées. Montrer qu'une de ces boules contient 0.

**Exercice 51.** Pour $d \in \mathbf{N}^*$, on note $E_d$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbf{K}[X]$ dont le degré vaut $d$. Si $P \in \mathbf{K}[X]$, $P = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n X^n$, on pose :

$$||P|| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

1. Justifier cette définition et prouver que c'est une norme.
2. Montrer que $E_d$ est fermé dans $(\mathbf{K}[X],\ ||\ \ ||)$.
3. Soit $P \in E_d$, montrer que toute racine $z$ de $P$ vérifie $|z| \leq ||P||$.
4. Soit $(P_n)$ une suite d'éléments de $E_d$ qui converge vers $P$ et pour chaque entier $n$ une racine $z_n$ de $P_n$. Notons $Z$ l'ensemble des racines de $P$. Que dire des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)$. Montrer que $\mathrm{d}(z_n, Z) \to 0$. En déduire, en utilisant la proposition 20, que, si la suite $(z_{n+1} - z_n)$ tend vers 0 alors la suite $(z_n)$ converge.

**Exercice 52 (Difficile X 2000).** Soit $K$ un compact non vide d'un espace vectoriel normé $E$ de dimension finie sur $\mathbf{R}$. On considère une application continue $f$ de $K$ dans $E$ telle que $f(K) \subset K$. On note $f^{(n)}$ la composée de $f$ $n$ fois avec elle même et on suppose qu'existe $x_0 \in K$ telle que la suite $(x_n)$ d'éléments de $K$ définie par $x_0$ et la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ ait un nombre fini de valeurs d'adhérence. On note $A$ leur ensemble.

1. Montrer que $A \neq \emptyset$. Soit $p \geq 1$ le cardinal de $A$. que dire si $p = 1$ ?
2. Montrer que $f$ induit une bijection de $A$ sur lui même.
3. Soit $\Omega$ un ouvert de $E$ qui contient $A$. Prouver qu'à partir d'un certain rang tous les $x_n$ sont dans $\Omega$.
4. On choisit un élément $a_0 \in A$ et l'on pose $a_n = f^{(n)}(a_0)$. Prouver l'existence d'un entier naturel $q \geq 1$ tel que $a_0, a_1, \ldots, a_{q-1}$ soient distincts et $a_q = a_0$.
5. Prouver que, si $x_{n_0}$ est suffisamment proche de $a_0$, la suite $(x_{n_0+nq})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a_0$.
6. Montrer que $p = q$ et que, pour $0 \leq r < p$, la suite $(x_{r+np})_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

### 5.2.3 Théorème de Heine

*cf cours* Application à la preuve de la continuité d'une fonction de plusieurs variables définie par une intégrale.

**Exemple 18.** Soit $f$ une application continue de $D = I \times J$ dans $\mathbf{K}$ où $I$ et $J$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$. Soit $a \in I$. L'application $g : D \to \mathbf{K}$ définie par :

$$g(x, y) = \int_a^y f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $D$.

# Chapitre 6

# Continuité des applications linéaires et bilinéaires

## 6.1 Étude des applications linéaires

**Proposition 44.** *Toute application linéaire $u$ d'un espace vectoriel normé $(E, N)$ de dimension finie, dans un autre $(F, N')$ est continue.*

*Démonstration.* Soit $(e) = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$ et $(\pi_1, \dots, \pi_p)$ la famille des formes coordonnées correspondantes. On a vu que les $\pi_i$ étaient continues (elles sont lipschitziennes). Si $x \in E$, il s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(x)\, e_i$$

donc

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(x)\, u(e_i)$$

D'où :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \pi_i\, u(e_i)$$

qui est continue d'après les théorèmes opératoires sur les applications continues. □

**Proposition 45.** *Avec les notations de la proposition précédente, il existe $k > 0$ tel que :*

$$\forall x \in E,\ N'\left(u(x)\right) \leq k\, N(x)$$





*En particulier, $u$ est $k$-lipschitzienne.*

*Démonstration.* L'ensemble $K = B_F(0,1)$ est compact dans $E$ car il est fermé et borné. La fonction $x \mapsto N'\left(u(x)\right)$ est continue sur $K$ comme composée d'applications qui le sont, elle est donc bornée sur $K$. Il existe donc $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in B_F(0,1),\ N'\left(u(x)\right) \leq k$$

De l'homogénéité de la norme $N$ on déduit l'inégalité voulue. Le caractère $k$-lipschitzien de $u$ s'obtient en appliquant cette inégalité au vecteur $x - y$. □

**Exercice 53.** $(E, ||\ \ ||)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension $p$. Soit $(e) = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de $E$. Démontrer que l'application $N$ définie sur $\mathcal{L}(E)$ par :

$$u \mapsto \sum_{i=1}^{p} ||u(e_i)||$$

Est une norme.
Démontrer qu'une suite $(u_n)$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ tend vers $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(x) = u(x)$. Etablir un résultat analogue pour les suites de matrices.

**Exercice 54.** Soit $E$ un sous espace de $\mathcal{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ stable par la dérivation D. On suppose que pour toute suite $(f_n)$ d'éléments de $E$ qui tend uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}$, il en est de même de la suite $(\mathrm{D}\, f_n)$.

1. Montrer qu'existe $C > 0$ telle que :

$$\forall f \in E,\ ||\mathrm{D}\, f||_\infty \leq C\, ||f||_\infty$$

2. Montrer que $E$ est de dimension finie et possède une base constituée de fonctions de la forme : $x \mapsto \mathrm{e}^{nix}$.

**Exercice 55 (Norme subordonnée).** Soit $(E, ||\ \ ||)$ un $\mathbf{K}$-EV de dimension finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose :

$$|||u||| = \sup_{||x||=1} ||u(x)|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||u(x)||}{||x||}$$

1. Justifier cette définition et cette inégalité.

2. Prouver que $||| \quad |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ qu'on appelle *norme subordonnée à la norme* $|| \quad ||$.
3. Prouver que, pour $u$ et $v \in \mathcal{L}(E)$, $|||u \circ v||| \leq |||u|||\,|||v|||$. Calculer $|||\mathrm{Id}|||$.
4. On suppose que la norme de $E$ est euclidienne ; que vaut $|||u|||$ en terme de spectre ?
5. On prend $E = \mathbf{K}^n$ muni de $|| \quad ||_\infty$. On identifie une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ qui lui est canoniquement associé. Exprimer $|||A|||$ à l'aide des coefficients de $A$.
6. Prouver que la norme $N$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $N(A) = n \max |a_{ij}|$ n'est subordonnée à aucune norme sur $\mathbf{R}^n$.

**Exemple 19 (Topologie et algèbre linéaire).** On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'une norme d'algèbre. On a les propriétés suivantes :
1. L'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}_n[X]$ qui associe à une matrice $A$ son polynôme caractéristique $\chi_A$ est continue *[utiliser la continuité du déterminant et les polynômes d'interpolation de Lagrange]*.
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
4. L'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue en $\mathrm{I}_n$ puis sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.
5. L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ *[utiliser la trigonalisation hors programme]*.

**Exercice 56.** On conserve les notations de l'exemple 19. Prouver que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires, de degré $n$ de $\mathbf{C}_n[X]$ qui ont une racine multiple est fermé pour la topologie usuelle de $\mathbf{C}_n[X]$. En déduire que l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ est l'ouvert constitué des matrices dont les valeurs propres sont distinctes.

**Exercice 57.** On muni $\mathbf{K}_n[X]$ d'une norme. Déduire de la continuité de l'application $A \mapsto \chi_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}_n[X]$, vue dans l'exemple 19, qu'une $\mathbf{K}$-matrice $A$ est nilpotente si et seulement s'il existe une suite $(A_n)$ de matrices semblables à $A$ qui tend vers 0.

**Exercice 58 (ENS).** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\exists k > 0,\ \exists \alpha \in ]0,1[,\ \forall y \in B_F(0,1)\ \exists x \in B_F(0,k),\ ||y - f(x)|| < \alpha$$

Montrer que $f$ est surjective.





## 6.2 Étude des applications bilinéaires

**Définition 21 (Norme produit).** Soient $(E, N)$ et $(E', N')$ deux $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. On peut définir une norme $N"$ sur l'espace vectoriel $E \times E'$ par :

$$N"(x, x') = N(x) + N'(x')$$

*Démonstration.* Les lecteurs vérifieront que c'est bien une norme. □

**Proposition 46.** *Soient $E$, $F$, $G$ trois $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $B$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$. Alors $B$ est continue sur $E \times F$. De plus, il existe $k > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ ||B(x, y)|| \leq k\, ||x||\, ||y||$$

*Démonstration.* Analogue à celle faite pour les applications linéaires : Soit $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, $(f) = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $F$, $(\pi_i)$ et $(\Pi_j)$ les systèmes de formes coordonnées dans ces bases.

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \pi_i(x) \Pi_j(y)\, B(e_i, f_j)$$

Les applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont linéaires donc continues sur $E \times F$, il en est donc de même de $(x, y) \mapsto \pi_i(x)\Pi_j(y)$ et donc de $B$. L'inégalité s'obtient en majorant $||B(x, y)||$ sur $B_F(0,1) \times B_F(0,1)$ qui est un compact de $E \times F$. □

**Exemple 20.** Les applications bilinéaires suivantes sont donc continues :
- L'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbf{K} \times E$ dans $E$.
- L'application $(u, v) \mapsto u \circ v$ de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.
- L'application $(A, B) \mapsto AB$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- Si $E$ est euclidien : Le produit scalaire : $E \times E \to E$.
- Si $E$ est euclidien de dimension 3 et orienté : Le produit vectoriel : $E \times E \to E$.

**Exemple 21 (Exponentielle de Matrice).** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a les résultats suivants :
1. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge. Sa somme est notée $\mathrm{e}^A$ ou $\exp A$.

2. L'application $t \mapsto \exp(tA)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tA} = A\,\mathrm{e}^{tA}$$

*[cf le chapitre "compléments" du cours sur les équations différentielles et systèmes différentiels]*

3. Si $R$ est une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui vérifie $R' = A\,R$ et $R(0) = \mathrm{I}_n$ alors $R(t) = \exp(tA)$.
4. Si $A$ et $B$ commutent alors $A$ et $\exp(B)$ commutent et :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB}$$

*[Utiliser la continuité du produit matriciel et la question précédente].*

**Exercice 59 (Mines 98).** Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K}$, prouver que l'ensemble des couples $(x, y)$ de vecteurs libres forme un ouvert de $E \times E$. Généralisation ?

**Exercice 60.** Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver l'existence de :

$$N(A) = \sup_{U \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})} |\operatorname{Tr}(AU)|$$

et prouver que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer $N(A)$ lorsque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ puis lorsque $A$ est quelconque (utiliser la décomposition polaire).

**Exercice 61.** Prouver que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut être approchée par une suite de matrices inversibles. En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut s'écrire sous la forme $QS$ où $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Généraliser aussi la décomposition $QR$.

**Exercice 62 (Ens).** Soit G un sous groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. On suppose que l'ensemble des réels $\operatorname{Tr}(M)$ où $M \in \mathrm{G}$ est fini. Prouver que G est fini.

**Exercice 63.** Prouver que l'application de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^n$ qui associe à une matrice $M$ le système de ses valeurs propres ordonnées en décroissant est continue. En déduire l'enchevêtement des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle et de celle obtenue en lui supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.





**Exercice 64.** $n$ est une entier naturel non nul.

1. Montrer qu'on définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ en posant :

$$N(A) = \sup_{X \in \mathbf{R}^n - \{0\}} \frac{(X|AX)}{(X|X)}$$

Exprimer $N(A)$ en fonction des valeurs propres de $A$.

2. Prouver que $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ puis que l'application $A \mapsto \sqrt{A}$ y est continue.