Dérivées des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, complexes ou vectorielles

PC*2

18 septembre 2003

Table des matières

Notations

- si $a < b$ sont deux réels, on notera $[a, b)$ l'un des deux intervalles $[a, b[$, $[a, b]$.
- $\mathbf{K}$ est le corps des réels ou des complexes, précisé si nécessaire.
- E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Dans certaines preuves, on le supposera muni d'une norme $\| \ \|$.
- Le terme *fonction numérique* désigne une fonction à valeurs réelles.
- Tous les intervalles considérés sont non réduits à un point. Si I est un intervalle et $a \in I$,on posera $I_a = \{h \in \mathbf{R}\ ,\ a + h \in I\}$, intervalle qui contient 0.
- $\mathring{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I.

1 Dérivée en un point

Définition 1.1. Soit f une application d'un intervalle I dans E. $a \in I$. On dit que f est *dérivable au point* a si l'application de $I - \{a\}$ dans E définie par :

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite quand x tend vers a le long de $I - \{a\}$. Cette limite est appelée *nombre dérivé de* f *au point* a et noté $f'(a)$ ou encore $D(f)(a)$, ou encore $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarque 1.1. Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, interpréter géométriquement $f'(a)$.

Proposition 1.1. *Avec les mêmes hypothèses et notations, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *f est dérivable au point a et $f'(a) = m$.*
- *f admet au voisinage de a le développement limité :*

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$$

Où ϵ est une application de I dans E telle que $\epsilon(a) = 0$ continue en 0.

- *L'application $h \mapsto f(a + h)$ de I_a dans E admet au voisinage de 0 le développement limité :*

$$f(a + h) = f(a) + mh + h\epsilon_1(h)$$

Où ϵ_1 est une application de I_a dans E telle que $\epsilon(0) = 0$ continue en 0.

Remarque 1.2. Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, interpréter géométriquement $\Delta(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Conclusion ?

Définition 1.2 (Notation différentielle). Soit $f : I \to E$,dérivable en $a \in I$,on appelle différentielle de f au point a,l'application $df(a)$ $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{R}$ dans E définie par :

$$h \mapsto df(a)(h) = f'(a).h$$

La différentielle de l'application $\pi : x \mapsto x$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ en n'importe quel point de $\mathbf{R}$ est égale à π,on la note dx donc :

$$\forall h \in \mathbf{R}\ ,\ dx(h) = h$$

ce qui permet d'écrire :

$$df(a) = f'(a)dx$$

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to E$ dérivable et nulle en 0. Etudier la limite de la suite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

En déduire la limite de la suite :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Proposition 1.2. *Avec les hypothèses et les notations précédentes, si f est dérivable en a,elle y est continue.* Les lecteurs donneront l'exemple d'une fonction continue en a et non dérivable en ce point.

Exercice 2 *(Difficile).* Soit $f :]-1,1[\to E$,continue en 0 et $k \in]-1,1[$. On suppose que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h) - f(kh)}{h} = l \in E$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Définition 1.3 (Dérivées latérales). On dit que $f : I \to E$ admet une *dérivée à droite* au point $a \in I$,supposé non plus grand élément de I,si l'application :

$$I \cap [a, +\infty[\to E \qquad x \mapsto f(x)$$

est dérivable en a. Sa dérivée en ce point est appelée *dérivée à droite de f au point a* et notée $f'_d(a)$. On définit aussi la dérivabilité à gauche de f en un point qui n'est pas plus petit élément de I.

Proposition 1.3. *$f : I \to E$ est dérivable en $a \in \dot{I}$ si et seulement si elle l'est à gauche et à droite et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

2 Dérivée globale

Définition 2.1. Une application d'un intervalle I dans E est dite *dérivable sur I* si elle est dérivable en tout point de I. L'application de I dans E qui associe à tout point $x \in I$ sa dérivée en ce point est notée f' ou encore $D(f)$ ou encore $\frac{df}{dx}$. On notera que f est alors continue sur I.

Proposition 2.1. *Soit $f : I \to E$ une application,J un sous intervalle de I. Si f est dérivable sur I,$f_{|J}$ est dérivable sur J. Réciproquement si J est ouvert et si $f_{|J}$ est dérivable sur J,f est dérivable en tout point de J.*

Démonstration.
Preuve : La partie directe est facile. Prouvons la réciproque quand J est ouvert. Soit $a \in J$,soit $\epsilon > 0$,puisque J est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset J$ et :

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\ ,\ x \neq a\ ,\ \left\|\frac{f(x) - f(a)}{x - a)} - f'_{|J}(a)\right\| < \epsilon$$

Comme $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$ et ϵ arbitraire,on en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I-\{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_{|J}(a)$$

d'où la dérivabilité de f en a. □

2.1 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.2. On dit qu'une application $f : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I et si sa fonction dérivée $f' : I \to E$ est continue sur I.

Exemple 2.1. La fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f(0) = 0$$

est dérivable en tout point de $\mathbf{R}^*$, en un tel point x :

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

La règle de dérivation permettant l'obtention de cette formule ne s'applique pas en 0 ; en ce point, il faut avoir recours à la définition. Pour $x \in \mathbf{R}^*$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \leq |x|$ pour $x \neq 0$ et :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ mais f' n'est pas continue en 0 puisque :

$$\lim_{n \to \infty} f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -1$$

et

$$\lim_{n \to \infty} f'\left(\frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}\right) = 0$$

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 2.2. *Soit $f : I \to \mathbf{C}$ et $a \in I$. Alors f est dérivable en $a \in I$* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I *si et seulement si* $\operatorname{Re} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *le sont et :*

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a) \quad \textit{resp} \quad D(f) = D(\operatorname{Re} f) + iD(\operatorname{Im} f)$$

En particulier $\overline{f}$ est dérivable au point a (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *et :*

$$\overline{f}'(a) = \overline{f'(a)} \quad \textit{resp} \quad D\left(\overline{f}\right) = \overline{D(f)}$$

Proposition 2.3. *Soit $f : I \to E$, ce dernier étant rapporté à une base $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$. Notons $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ les composantes de $f(x)$ dans (e) ; alors f est dérivable en $a \in I$* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *si et seulement si les f_1 le sont et :*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i \quad \textit{resp} \quad D(f) = \sum_{i=1}^{n} D(f_i) e_i$$

Démonstration. Soit $x \in I - \{a\}$, la composante d'indice i du vecteur $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}$ dans la base (e) est $\frac{f_i(x)-f_i(a)}{(x-a)}$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}$ admet une limite l quand $x \to a$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la fonction $x \mapsto \frac{f_i(x)-f_i(a)}{(x-a)}$ admet une limite l_i et qu'alors :

$$l = \sum_{i=1}^{n} l_i e_i$$

ce qui est bien le résultat attendu. La généralisation aux fonctions dérivables sur I et $\mathcal{C}^1(I, E)$ s'en déduit immédiatement. □

Proposition 2.4 (Dérivée d'une combinaison linéaire). *Soient f et g des applications de I dans E dérivables en un point $a \in I$* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *; α, β des scalaires. Alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *et*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a) \quad \textit{resp} \quad D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$$

ou encore,si f et g sont dérivables sur I :

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$$

On en déduit que l'ensemble des applications de I dans E dérivables sur I (resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel noté $\Delta^1(I, E)$* (resp $\mathcal{C}^1(I, E)$) *et que l'application $f \mapsto f'(a)$ est une forme linéaire sur cet espace.*

Démonstration. Posant $h = \alpha f + \beta g$, on passe à la limite l'égalité :

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \alpha \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \beta \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Les cas dérivables sur I et $\mathcal{C}^1$ s'en déduisent immédiatement.

□

Exercice 3. Soient f et g deux applications dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. A quelle condition la fonction $\max(f, g)$ est elle dérivable ? *On pourra, par exemple, exprimer* $\max(f, g)$ *à l'aide de* $|f - g|$

Proposition 2.5. *Soit f une application de I dans E dérivable en un point $a \in I$* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I). *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un autre $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $g = u \circ f : I \to F$ est dérivable en a* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *et :*

$$g'(a) = u(f'(a)) \quad resp \quad D(u \circ f) = u(D(f))$$

Démonstration. Pour $x \in I - \{a\}$, la linéarité de u permet d'écrire :

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = u\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

Comme une application linéaire d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie dans un autre est toujours continue, le théorème de composition des limites et la dérivabilité de f en a permettent d'écrire :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} u\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) = u(f'(a))$$

ce qui est le résultat voulu. Les autres s'en déduisent. □

Proposition 2.6 (Dérivée de $B(f, g)$). *Soient E F G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $B : (x, y) \mapsto B(x, y)$ une application bilinéaire de $E \times F \to G$. Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont deux applications dérivables en $a \in I$* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I), *alors l'application $\phi : I \to G$ définie par $\phi(x) = B(f(x), g(x))$ est dérivable en a* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *et :*

$$\phi'(a) = B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a)) \quad resp \quad D(\phi) = B(f, D(g)) + B(g, D(f))$$

En particulier si f et g sont deux applications de I dans $\mathbf{K}$ dérivables au point $a \in I$ (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *; alors fg est dérivable en a* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *et :*

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \quad resp \quad D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

ou encore :

$$d(fg) = fdg + gdf$$

Démonstration. Il existe deux applications $\epsilon_1 : I_a \to E$ et $\epsilon_2 : I_a \to F$ telles que, pour tout $h \in I_a$:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + f'(a)h + h\epsilon_1(h) & (1) \\ g(a + h) &= g(a) + g'(a)h + h\epsilon_2(h) & (2) \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \epsilon_1(h) = 0 \text{ et } \lim_{h \to 0} \epsilon_2(h)$$

En remplaçant dans l'expression de $\phi(a+h) = B(f(a+h), g(a+h))$ $f(a+h)$ et $g(a+h)$ par les développements limités ci-dessus, la bilinéarité de B permet alors d'écrire :

$$\phi(a + h) = \phi(a) + [B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a))]\, h + R(h)$$

avec :

$$R(h) = B(f(a + h), h\epsilon_2(h)) + B(h\epsilon_1(h), g(a) + g'(a)h)$$

qui s'écrit encore, vu la bilinéarité de B, sous la forme $h\epsilon(h)$ où l'on a posé :

$$\epsilon(h) = B(f(a + h), \epsilon_2(h)) + B(\epsilon_1(h), g(a) + g'(a)h)$$

Or l'application $B : E \times F \to G$ est continue car les espaces sont de dimension finie. Il en résulte :

$$\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

et le résultat voulu. généralisations immédiates. □

Voyons quelques applications de ce résultat.

Proposition 2.7. *Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien* (resp hermitien) *dont on note $||\ \ ||_2$ la norme associée au produit scalaire. f et g deux applications de I dans E dérivables au point $a \in I$* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I), *alors l'application $\phi : I \to \mathbf{K}$ définie par :*

$$\phi(x) = (f(x)|g(x))$$

est dérivable au point a (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *et :*

$$\phi'(a) = (f(a)|g'(a)) + (f'(a)|g(a)) \quad resp \quad D(\phi) = (D(f)|g) + (f|D(g))$$

En particulier, en prenant $f = g$, il vient dans le cas euclidien ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$) :

$$\phi'(a) = 2(f(a)|f'(a)) \quad resp \quad D(||f||_2^2) = 2(f|D(f))$$

Et dans le cas hermitien ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$) :

$$\phi'(a) = 2\,\mathrm{Re}(f(a)|f'(a)) \quad \textit{resp} \quad D(||f||_2^2) = 2\,\mathrm{Re}(f|D(f))$$

Il en résulte que, dans le cas euclidien, si pour tout $x \in I$, $f(x)$ est un vecteur unitaire et f est dérivable sur I alors, pour tout $x \in I$, $f(x) \perp f'(x)$.

Démonstration. Dans le cas euclidien, cela résulte de la bilinéarité de $(\ |\ )$. Dans le cas hermitien, il faudrait refaire une preuve analogue à celle de la proposition précédente. □

Proposition 2.8. *Si E est un plan euclidien* (resp un espace euclidien de dimension 3) *orienté. Si f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $I \to E$ alors les applications suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$:*

$$x \mapsto Det(f(x), g(x)) \text{ et } D(Det(f, g)) = Det(f, D(g)) + Det(D(f), g)$$

$$x \mapsto f(x) \wedge g(x) \text{ et } D(f \wedge g) = f \wedge D(g) + D(f) \wedge g$$

Démonstration. Il s'agit toujours de dérivées d'applications bilinéaires en f et g. □

Proposition 2.9 (Dérivée de $\frac{f}{g}$). *Soient $f : I \to E$ et $g : I \to \mathbf{K}$ deux applications dérivables au point $a \in I$* (resp dérivables sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I). *On suppose que g ne s'annule pas sur I. Alors $u = \frac{f}{g}$ est dérivable au point a* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *et :*

$$u'(a) = \frac{g(a)f'(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)} \quad \textit{resp} \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD(f) - fD(g)}{g^2}$$

ou encore,si f et g sont dérivables sur I et $0 \notin g(I)$:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Démonstration. On étudie la dérivabilité de $\frac{1}{g}$ et on se ramène à un produit. □

Définition 2.3 (Dérivée logarithmique). Soit $f : I \to \mathbf{K}$ dérivable,ne s'annulant pas sur I. On appelle *dérivée logarithmique de f en un point $a \in I$*

le scalaire $\frac{f'(a)}{f(a)}$. Si g vérifie les mêmes hypothèses,en posant $u = fg$,$v = \frac{f}{g}$ et $w = f^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{Z}$,il vient :

$$\frac{u'(a)}{u(a)} = \frac{f'(a)}{f(a)} + \frac{g'(a)}{g(a)}$$

$$\frac{v'(a)}{v(a)} = \frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{g'(a)}{g(a)}$$

$$\frac{w'(a)}{w(a)} = \alpha\frac{f'(a)}{f(a)}$$

Démonstration. Il ne faut **surtout pas prendre le logarithme** puisque les fonctions peuvent être à valeurs complexes. On vérifie ces formules à partir de celles du produit. □

Proposition 2.10 (Dérivée d'une fonction composée). *Soit $\phi : J \to \mathbf{R}$ une application dérivable au point $a \in J$* (resp dérivable sur J resp $\mathcal{C}^1$ sur J). *On suppose $\phi(J) \subset I$. Soit $f : I \to E$ une application dérivable au point $\phi(a) \in I$* (resp dérivable sur I resp $\mathcal{C}^1$ sur I) *Alors l'application $u = f \circ \phi : J \to \mathbf{K}$ est dérivable au point a* (resp dérivable sur J resp $\mathcal{C}^1$ sur J) *et*

$$u'(a) = f'(\phi(a)).\phi'(a) \quad \textit{resp} \quad D(u) = D(f) \circ \phi.D(\phi)$$

Ou encore,si f et ϕ sont dérivables sur I et J :

$$d(f \circ \phi) = (df \circ \phi).d\phi$$

Démonstration. Normalement vue en HX pour les fonctions numériques. La preuve est identique (on peut aussi passer aux composantes dans une base). □

Exemple 2.2. Soit $f : I \to \mathbf{R}$,à valeurs strictement positives, dérivable sur I ;$\alpha \in \mathbf{K}$. L'application :

$$u = f^\alpha : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$$

est dérivable sur I et

$$\frac{u'}{u} = \alpha\frac{f'}{f}$$

3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

On renvoie au cours de première année pour les délonstrations.

Proposition 3.1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable sur I. Si f présente un extrémum local en $a \in \dot{I}$,alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse.*

Théorème 3.1 (Théorème de ROLLE). *Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 3.2 (Théorème des accroissements finis). *Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Les lecteurs détaillerons l'interprétation géométrique de ce résultat.

Pour les fonctions à valeurs réelles. Il est essentiel de remarquer que ces deux résultats ne s'étendent ni aux fonctions complexes,ni aux fonctions vectorielles. Exemple $x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$. Les démonstrations doivent être connues.

Exercice 4. Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$$

On interprètera cette relation géométriquement

Remarque 3.1. On peut également paramétrer le segment $[a, b]$ en posant $b = a + h$,de sorte que :

$$[a, b] = \left\{x \ / \ \frac{x - a}{b - a} \in [0, 1]\right\} = \{a + th \ , \ t \in [0, 1]\}$$

Le théorème des accroissements finis s'écrit alors :

$$\exists \theta \in]0, 1[\ , \ f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$$

L'ordre des bornes peut être inversé.

Remarque 3.2 *(Contexte d'utilisation de ces théorèmes).* Le théorème de Rolle sert à obtenir des informations sur les zéros de la dérivée à partir d'informations sur les zéros de la fonction. En revanche le théorème des accroissements finis s'utilise généralement dans l'autre sens ; d'ailleurs il se généralisera aux fonctions complexes et vectorielles sous la forme d'une inégalité obtenue par intégration. Voici des exercices qui précisent ce point de vue.

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, a_2, .., a_n$ des réels non tous nuls. Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < .. < \alpha_n$ des réels ; montrer que la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + .. + a_n x^{\alpha_n}$$

possède au plus $n - 1$ racines réelles.

Exercice 6.
1. Montrer que si un polynôme à coefficients réels est scindé sur $\mathbf{R}$, sa dérivée aussi.
2. Montrer que si un polynôme P à coefficients réels est scindé sur $\mathbf{R}$, et si $\lambda \in \mathbf{R}$,$P' - \lambda P$ est aussi scindé sur $\mathbf{R}$. En déduire que si $Q \in \mathbf{R}[X]$ est scindé sur $\mathbf{R}$,alors $Q(D).P$ est encore scindé sur $\mathbf{R}$. (D est l'opérateur de dérivation).

Exercice 7 *(Analogue de Césaro pour les fonctions).* Soit $f \in \Delta^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. On suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l \in \bar{\mathbf{R}}$$

. Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$$

Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 8. Soient $f \in \Delta^1(I, \mathbf{R})$,$a, b \in I$. On suppose $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. En déduire que si f est dérivable sur I et si $a, b \in I$, f' prend toute valeur intermédiaire entre $f'(a)$ et $f'(b)$[1]. Qu'en déduire sur l'ensemble $f'(I)$? Retrouver ce résultat en utilisant les fonctions

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - b}$$

définies sur $]a, b[$.

[1] Théorème de Gaston DARBOUX

Proposition 3.2 (Conséquences du théorème des accroissements finis). *Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ dérivable à l'intérieur de I.*

- *f est croissante (resp décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp $f' \leq 0$) sur $\dot{I}$.*
- *f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\dot{I}$ et $\{x \in I\ ,\ f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide.*
- *Si $k \in \mathbf{R}_+$,f est k-lipschitzienne sur I si et seulement si $|f'(x)| \leq k$ sur $\dot{I}$.*
- *Soit $f : I \to E$, f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ sur $\dot{I}$. La démonstration de ce résultat se ramène au cas des fonctions numériques par passage aux composantes dans une base. Pour les fonctions à valeurs complexes, il s'obtient par considération de la partie réelle et de la partie imaginaire.*

Exercice 9. On considère,dans le plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R. Si $\theta \in \mathbf{R}$,on note $M(\theta)$ le point de $(\mathcal{C})$ défini par :

$$\overrightarrow{OM} = R\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\right)$$

1. On fixe $\phi \in]0, 2\pi[$ et on pose $A = M(0)$ et $C = M(\phi)$; déterminer le paramètre $\theta \in [0, \phi]$ tel qu'en posant $B = M(\theta)$,le produit :

$$P(A, B, C) = AB.BC.CA$$

   soit maximum. En déduire pour quels systèmes de points A, B, C de $(\mathcal{C})$ le produit $P(A, B, C)$ est maximum.
2. Reprendre l'étude précédente en remplaçant $(\mathcal{C})$ par un arc de cercle de longueur $R\alpha$ où $0 < \alpha < 2\pi$.

Théorème 3.3 (Théorème de la limite de la dérivée). *Soit $f : [a, b) \to E$. On suppose que f est* continue sur $[a, b)$ *et dérivable sur $]a, b[$. On suppose également :*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in]a,b[}} f'(x) = l \in E$$

alors f est dérivable au point a et $f'(a) = l$. Résultat analogue avec un intervalle de la forme $(b, a]$.

Démonstration. On traite d'abord le cas des fonctions à valeurs réelles,le cas complexe s'en déduit via les parties réelles et imaginaires, le cas général par décomposition sur une base. Soit $\epsilon > 0$,il existe $\eta > 0$ tel que $]a, a+\eta[\subset]a, b[$ et :

$$x \in]a, a+\eta[\Rightarrow |f'(x) - l| < \epsilon$$

Soit $x \in]a, a+\eta[$,donc $[a, x] \subset [a, b[$ et $]a, x[\subset]a, b[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a, x]$. Il existe $c \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$. Or $c \in]a, a+\eta[$,donc $|f'(c) - l| < \epsilon$. On a donc établi que :

$$x \in]a, a+\eta[\Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l\right| < \epsilon$$

c'est à dire que f est dérivable à droite au point a et que $f'_d(a) = l$. □

Exercice 10. Reprendre la même étude si f est à valeurs réelles et $l \pm \infty$.

Exercice 11. Montrer qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de polynômes telle que :

$$\begin{cases} B_1 = X - \frac{1}{2} \\ B'_n = B_{n-1} \\ \int_0^1 B_n(t)dt = 0 \end{cases}$$

Pour $n \geq 2$,on note $\tilde{B}_n$ la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_n sur $[0, 1[$. Montrer soigneusement que,pour $n \geq 3$,$\tilde{B}_n$ admet une dérivée continue qui n'est autre que $\tilde{B}_{n-1}$.[2]

4 La fonction exponentielle complexe

On suppose connue l'exponentielle réelle et les fonctions trigonométriques usuelles.

Définition 4.1. Soit $z = a + ib$ avec $a = \mathrm{Re}\, z, b = \mathrm{Im}\, z$. On pose :

$$\exp z = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a(\cos b + i \sin b)$$

En particulier,si $\theta \in \mathbf{R}$,on retrouve :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

[2] Les B_n sont *les polynômes de Bernoulli* et les $\tilde{B}_n$ sont *les fonctions de Bernoulli*

Proposition 4.1 (Propriétés). – *L'exponentielle réalise un morphisme du groupe additif* $(\mathbf{C},+)$ *dans le groupe multiplicatif* $(\mathbf{C}^*,\times)$*. C'est à dire :*

$$\forall z,z'\in\mathbf{C}\ :\ \mathrm{e}^{z+z'}=\mathrm{e}^{z}\,.\,\mathrm{e}^{z'}$$

– *Quelques propriétés opératoires :*

$$\forall z\in\mathbf{C}\ :\ \mathrm{e}^{-z}=\frac{1}{\mathrm{e}^{z}}$$

$$\forall z\in\mathbf{C}\ :\ \overline{\exp z}=\mathrm{e}^{\bar z}$$

$$\forall z\in\mathbf{C}\ :\ |\,\mathrm{e}^{z}\,|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}$$

– *L'application* $t\mapsto \mathrm{e}^{it}$ *réalise un morphisme surjectif du groupe additif* $(\mathbf{R},+)$ *sur le sous groupe* $\mathbf{U}$ *de* $(\mathbf{C}^*,\times)$ *défini par :*

$$\mathbf{U}=\{z\in\mathbf{C}\ ,\ |z|=1\}$$

Le lecteur en déduira la surjectivité de l'exponentielle : $\mathbf{C}\to\mathbf{C}^*$*.*

– *Si* $z\in\mathbf{C}$*, l'application* $t\mapsto \mathrm{e}^{zt}$ $\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *est dérivable et :*

$$\forall t\in\mathbf{R}\ ,\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{zt}=z\,\mathrm{e}^{zt}$$

Réciproquement c'est la seule application dérivable $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *telle que :*

$$f(0)=1\ \textit{et}\ \forall t\in\mathbf{R}\ f'(t)=z.f(t)$$

5 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 5.1. Soit n un entier naturel non nul ; $f:I\to E$. On dit que *f est n fois dérivable sur I* S'il existe une suite $(f_0,f_1,\dots,f_n)$ de fonctions telles que : $f_0,f_1,\dots,f_{n-1}\in\Delta^1(I,E)$ et :

$$f_0=f\quad\text{et}\quad\forall i\in\{0,\dots,n-1\}\ ,\ f_i'=f_{i+1}$$

La fonction f_n ne dépend alors pas de la suite considérée,on l'appelle *dérivée n-iéme de f sur I* et on la note $f^{(n)}$ ou encore,si la variable est notée x, $\frac{d^n}{dx^n}f$. *Cette notation n'a cependant pas la même efficacité calculatoire que dans le cas où $n=1$.*

Proposition 5.1. *Supposons $n=p+q$, $p\geq 1,q\geq 1$. Alors f admet une dérivée d'ordre n sur I si et seulement si elle admet une dérivée d'ordre p sur I et si $f^{(p)}$ admet une dérivée d'ordre q. On a alors :*

$$f^{(n)}=(f^{(p)})^{(q)}$$

En particulier,pour $p=n-1$,$q=1$,on retrouve la définition récursive classique de $f^{(n)}$.

Exercice 12. Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur un intervalle I,$a,a+2h$ deux points de I. Montrer que :

$$\exists\theta\in]0,2[\ ,\ f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)=h^2f''(a+\theta h)$$

Exercice 13. Soit f une fonction numérique, indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$. On définit une suite (f_n) d'applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$f_0=f\ \text{et}\ \forall x>0,\ f_{n+1}(x)=f_n(x+1)-f_n(x)$$

Prouver que :

$$\forall x>0,\exists c>x,\ f_n(x)=f^{(n)}(c)$$

En déduire les réels λ tels que $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ n^\lambda\in\mathbf{N}$.

Définition 5.2 (Classe $\mathcal{C}^n$). Soit $n\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$. $f:I\to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- Pour $n=0$,elle est continue.
- pour $n\in\mathbf{N}^*$,elle admet une dérivée d'ordre n continue sur I *(ce qui entraine l'existence et la continuité de toutes les dérivées intermédiaires).*
- Pour $n=\infty$,si elle admet des dérivées de tous ordres *(nécessairement continues)* sur I.

Proposition 5.2. $\mathcal{C}^n(I,E)$ *:Ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel. L'opérateur de dérivation est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I,E)$ noté généralement D,ce qui suppose $D^0=Id$.*

Remarque 5.1. Les lecteurs établiront le résultat suivant utile dans la théorie des suites et séries de fonctions et d'intégrales dépendant d'un paramètre : Une application $f:I\to E$ est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si sa restriction à tout segment de I l'est. *[Procéder par récurrence en commençant par les cas $n=0,1$]*

Proposition 5.3 (Dérivées successives de l'exponentielle complexe). *Soit $z \in \mathbf{C}$,l'application $t\,\mathrm{e}^{zt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$:*

$$\frac{d^n}{dt^n}\,\mathrm{e}^{zt} = z^n\,\mathrm{e}^{zt}$$

En prenant $z = i$,on retrouve rapidement les formules :

$$\frac{d^n}{dt^n}\cos t = \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \frac{d^n}{dt^n}\sin t = \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Théorème 5.1 (autre forme du théorème de la limite de la dérivée). *Soit f une application d'un intervalle $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ dans E telle que :*

- *f est continue sur $[a, b[$.*
- *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ (c'est à dire que la restriction de f à $]a, b[$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *f' admet une limite m quand x tend vers a (le long de $]a, b[$). Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et $f'(a) = m$. On a,bien entendu,un résultat analogue avec un intervalle du type $]b, a]$ $(b < a)$.*

On reprouvera ce résultat en intégration.

Exercice 14 *(utilise des développements limités).* Montrer que la fonction numérique f définie sur $\mathbf{R} - \{0, \pi\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(\pi - x)}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}$ notée encore f. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 5.4 (Recollement des applications $\mathcal{C}^1$). *Soit $f : [a, c] \to E$ et $a < b < c$. On suppose f continue sur $[a, c]$ et les restrictions g et h de f aux intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, c]$ si et seulement si $g'(b) = h'(b)$. Résultat analogue avec des intervalles ouverts ou semi ouverts à bornes éventuellement infinies.*

Démonstration. D'après la proposition 2.1, si $f \in \mathcal{C}^1([a, c], E)$, g et h sont dérivables sur $[a, b]$ et $[b, c]$ et :

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ h'(x) & \text{si } x \in [b, c] \end{cases}$$

donc g' et h' sont continues sur $[a, b]$ et $[b, c]$ et $g'(b) = h'(b)$.
Réciproquement supposons $g \in \mathcal{C}^1([a, b], E)$ et $h \in \mathcal{C}^1([b, c], E)$ et $g'(b) = h'(b)$, alors f est dérivable sur $[a, b[$ et $]b, c[$ et :

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ h'(x) & \text{si } x \in]b, c] \end{cases}$$

de plus, f est dérivable à droite et à gauche en b et :

$$f'_d(b) = g'(b) = h'(b) = f'_g(b)$$

donc f est dérivable sur $[a, c]$ et :

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ g'(b) = h'(b) & \text{si } x = b \\ h'(x) & \text{si } x \in]b, c] \end{cases}$$

reste à voir que la continuité de g et h entraîne la continuité de f' sur $[a, c]$. □

Proposition 5.5 (Recollement des applications $\mathcal{C}^n$). *Soit $f : [a, c] \to E$ et $a < b < c$. On suppose que les restrictions g et h de f aux intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$ sont de classe $\mathcal{C}^n$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, c]$ si et seulement si pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $g^{(k)}(b) = h^{(k)}(b)$. Résultat analogue avec des intervalles ouverts ou semi ouverts à bornes éventuellement infinies.*

Démonstration. La partie directe est laissée aux lecteurs. Pour établir la réciproque on prouve par récurrence sur k en utilisant la proposition 5.4 que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, c]$ avec :

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ h^{(k)}(x) & \text{si } x \in [b, c] \end{cases}$$

□

Exercice 15. Montrer que la fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{-1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, deux fois dérivable. On suppose l'existence de deux réels positifs M_0 et M_2 qui majorent respectivement $|f|$ et $|f"|$. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

Indication : Majorer d'abord |f'(0)|, il pourra être utile de faire des considérations cinématiques. Cet exercice sera revu sous une autre forme en intégration.

Proposition 5.6 *(Formule de Leibniz). Soit f et g deux applications n fois dérivables de I dans $\mathbf{K}$; alors fg est n fois dérivables sur I et :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(On convient que la dérivée d'ordre 0 d'une fonction est cette fonction elle même)

Exercice 17. Calculer,par deux méthodes,la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \cos^3 x$$

Exercice 18. Calculer la dérivée d'ordre n de

$$\mathrm{e}^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$$

Exemple 5.1 *(Contexte d'utilisation).* La formule de Leibniz est trés commode pour établir des relations de récurrences concernant des suites de polynômes associés aux dérivées successives d'une fonction. Considérons la fonction u définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Une récurrence évidente sur n assure que u admet une dérivée d'ordre n sur $\mathbf{R}$ de la forme :

$$u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x)$$

où $(H_n)_{n\in N}$ est la suite de polynômes définie par :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0\ ,\ H_{n+1} = -XH_n + H_n'$$

On va trouver une autre relation de récurrence linéaire entre trois polynômes H_n consécutifs. Pour cela on écrit une équation différentielle linéaire vérifiée par u :

$$(E) \qquad u'(x) = -xu(x)$$

Pour $n \geq 1$, on dérive cette relation n fois grâce à la formule de Leibniz :

$$u^{(n+1)}(x) = -xu^{(n)}(x) - \mathrm{C}_n^1 u^{(n-1)}(x)$$

d'où la relation voulue :

$$H_{n+1} = -XH_n - nH_{n-1}$$

En comparant les deux relations de récurrence,on tire :

$$H_n' = -nH_{n-1}$$

Le succés de la méthode tient u vérifie une équation différentielle *à coefficients polynômiaux de degrés faibles.* Les lecteurs pourront prouver,à titre d'exercice que tous le zéros de H_n sont réels,distincts et séparés par ceux de H_{n-1} en rappelant qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$,de degré n, possède au plus n racines distinctes.

Exercice 19. Etudier,de la même manière,les dérivées successives de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 20. soit $f(x) = \operatorname{Arcsin}^2 x$,Trouver une relation de récurrence linéaire entre trois dérivées consécutives de f.

Proposition 5.7. *Soit $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. L'espace vectoriel $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$ est une sous algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$* (les lecteurs préciserons les opérations)

Proposition 5.8. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $\phi \in \mathcal{C}^n(J, \mathbf{R})$ avec $\phi(J) \subset I$. Alors $g = f \circ \phi \in \mathcal{C}^n(J, E)$.*

Démonstration.
Preuve abrégée :On procède par récurrence sur n en remarquant que :

$$g' = f' \circ \phi.\phi'$$

qui est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ d'aprés l'hypothèse de récurrence. $\square$

Proposition 5.9. *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbf{K})$ qui ne s'annule pas sur I. Alors $g = \frac{1}{f} \in \mathcal{C}^n(I,\mathbf{K})$*

Démonstration.
Preuve abrégée :De même nature que la précédente, par récurrence sur n en remarquant que :

$$g' = \frac{-f'}{f^2}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ d'aprés l'hypothèse de récurrence. □

Exercice 21. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f"(x)|$. On fixe $x \in]a,b[$. Prouver l'existence d'un polynôme du second degré P qui interpole f en les points a,x,b *ie*

$$P(a) = f(a) \quad P(b) = f(b) \quad P(x) = f(x)$$

Prouver que $(f-P)"$ s'annule sur $]a,b[$. En déduire que :

$$\exists c \in]a,b[,\ f(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{2} f"(c)$$

et donc que :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq \frac{M_2(b-a)^2}{8}$$

Voyez vous une application au calcul numérique ? *Tout cela sera généralisé ultérieurement*

6 Classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux

Définition 6.1. $f : [a,b] \to E$ est dite *de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur ce segment* s'il existe une subdivision :

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[t_i, t_{i+1}]$. Pour $j \in \{1,\ldots,n\}$, la dérivée *(je dirai plutôt la dérivée généralisée)* d'ordre j de f est définie sur $[a,b] - S$ où S est contenue dans la partie finie constituée des points t_i ; elle est notée $D^j f$ et si on la prolonge arbitrairement à $[a,b]$ la fonction obtenue, généralement notée encore $D^j f$ est de classe $\mathcal{C}^{n-j}$ par morceaux.

Remarque 6.1. Si l'on effectue un tel prolongement avec l'abus de notation $D^j f$, il est fortement conseillé de le préciser, particulièrement à l'écrit.

Proposition 6.1 (particulièrement utile). *Soit $f : [a,c] \to E$ et $a < b < c$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $[a,c]$ si et seulement si ses restrictions aux segments $[a,b]$ et $[b,c]$ le sont.*

Démonstration. Laissée aux lecteurs. Ce résultat sera revu à propos de l'intégration et des séries de Fourier. □

Définition 6.2 (Cas d'un intervalle quelconque). Une fonction $f : I \to E$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur I si sa restriction à tout segment de I est de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur ce segment.

Exemple 6.1. La fonction numérique $x \mapsto [1/x]$, prolongée par $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $]0,a]$ $(a > 0)$ mais pas sur $[0,a]$.

Proposition 6.2. *Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et* **continue** *sur I. Si $Df = 0$ sur I privé des points où f n'est pas dérivable, alors f est constante sur I.*

Démonstration. Soient a et b appartenant à I avec $a < b$. Prouvons que $f(a) = f(b)$ ce qui suffira à conclure. La restriction de f au segment $[a,b]$, notée encore abusivement f est, par définition, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Notons f_i le prolongement $\mathcal{C}^1$ de $f_{|]t_{i-1},t_i[}$ à $[t_{i-1}, t_i]$. Pour $t \in]t_{i-1}, t_i[$, f_i est dérivable en t et $f_i'(t) = Df(t) = 0$ par hypothèse. f_i est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[t_{i-1}, t_i]$, de dérivée nulle sur $]t_{i-1}, t_i[$. Elle est donc constante sur $[t_{i-1}, t_i]$. Donc $f_i(t_{i-1}) = f_i(t_i)$. Mais puisque f est continue :

$$f(t_{i-1}) = f_i(t_{i-1}) \text{ et } f_i(t_i) = f(t_i)$$

Donc $f(t_{i-1}) = f(t_i)$ et la conclusion suit. □

7 Fonctions réciproques

Théorème 7.1. *Soit f une application continue,strictement croissante (resp strictement décroissante) d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On rappelle que f induit alors un homéomorphisme de I sur l'intervalle $f(I) = J$ dont l'homéomorphisme réciproque sera noté f^{-1}. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Alors,si f esr dérivable au point x_0 et $f'(x_0) \neq 0$,f^{-1} est dérivable au point y_0 et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si $f'(x_0) = 0$, *alors*

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in J - \{y_0\}}} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = +\infty \quad \textit{resp} \ -\infty$$

Démonstration. En principe vue en HX. □

Définition 7.1 ($\mathcal{C}^n$ difféomorphismes). $n \geq 1$. *Un* $\mathcal{C}^n$ *difféomorphisme d'un intervalle* I *sur un intervalle* J est une bijection de I sur J de classe $\mathcal{C}^n$ ainsi que sa bijection réciproque.

Théorème 7.2. $n \geq 1$. *Soit* $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$. *Pour que* f *soit un* $\mathcal{C}^n$ *difféomorphisme de* I *sur l'intervalle* $J = f(I)$, *il est nécessaire et suffisant que* f' *ne s'annule pas sur* I.

Démonstration. Si f' ne s'annule pas sur I, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f' qui est continue sur I assure que celle ci y garde un signe constant et donc qu'elle est strictement monotone sur I. Elle induit donc un homéomorphisme de I sur l'intervalle $J = f(I)$. Le théorème 7.1 s'applique alors à f puisque f' ne s'annule pas sur I. $g = f^{-1}$ est donc dérivable en tout point $y \in J$ et $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Supposons g de classe $\mathcal{C}^k$ sur J $(0 \leq k < n)$; $f' \circ g$ est alors également de classe $\mathcal{C}^k$ puisque f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ $(n-1 \geq k)$. Il en résulte que g' est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Une récurrence élémentaire fait le reste. Réciproquement, si $g = f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, on peut dériver sur J la relation : $f \circ g(y) = y$ d'où :

$$f'(g(y))g'(y) = 1$$

et donc $g'(y) \neq 0$ pour tout $y \in J$.

□

Remarque 7.1. En pratique,une fois les conditions de validité du théorème vérifiées,on calcule les dérivées successives de f^{-1} en dérivant (ou en différentiant) plusieurs fois la relation :

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

Ce qui évite tout effort de mémoire.

Exemple 7.1.
– L'application $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$,sa dérivée est strictement positive sur $\mathbf{R}$,elle induit donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur son image $]0, +\infty[$. Pour obtenir la dérivée du difféomorphisme réciproque ln,il suffit de dériver la relation :

$$\mathrm{e}^{\ln x} = x$$

d'où,pour $x > 0$:

$$\left(\frac{d}{dx} \ln x\right) \mathrm{e}^{\ln x} = 1 \text{ d'où } \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

– Même méthode avec les fonctions réciproques des fonctions usuelles :

$$\mathrm{Arcsin}\, x \quad \mathrm{Arccos}\, x \quad \mathrm{Arctg}\, x$$

Exercice 22. Montrer que la relation :

$$y^4 + y = x$$

définit une fonction $y = f(x)$ de $\mathbf{R}_+$ dans lui même. Calculer ses deux premières dérivées. Trouver la forme de sa dérivée d'ordre n. Ecrire une procédure Maple capable d'automatiser le calcul de la question précédente.

8 Quelques techniques de calcul

8.1 Changement de fonction

Soit,par exemple,à calculer le dérivée de :

$$f(x) = x \left|1 + \frac{1}{x}\right|^{x+1}$$

Sur chacun des intervalles I constituant $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$. Posons :

$$u(x) = (x+1) \ln \left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

de sorte que $f(x) = x\,\mathrm{e}^{u(x)}$; il vient alors,pour $x \in D$:

$$f'(x) = (xu'(x) + 1)\,\mathrm{e}^{u(x)}$$

avec

$$u'(x) = -\frac{1}{x} + \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

D'où :

$$f'(x) = x \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \mathrm{e}^{u(x)} = x\left|1 + \frac{1}{x}\right|^{x+1} \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

8.2 Signe d'une fonction, inégalités

8.2.1 Méthodes d'étude du signe d'une fonction

Pour étudier le signe d'une fonction f sur un intervalle I (en pratique une dérivée). On conseille d'observer les principes suivants.

- Factoriser l'expression de f chaque fois que c'est possible. En particulier si elle est polynômiale ou si elle s'y ramène via un changement de fonction.
- Si f est continue sur $]a, b[$ et ne s'y annule pas, elle y garde un signe constant. *Il faut alors invoquer la continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires.*
- Si l'expression de f est de la forme :

  $$u(x)\,\mathrm{e}^{v(x)} + w(x)$$

  Où u, v, w sont des fractions rationnelles (quotients de polynômes), on sépare l'intervalle en sous intervalles où w ne s'annule pas et, sur chacun d'eux, on étudie la fonction auxiliaire :

  $$g(x) = \frac{u(x)}{w(x)}\,\mathrm{e}^{v(x)} + 1$$

  Dont la dérivée est le produit d'une fraction rationnelle par une exponentielle strictement positive. D'où les variations de g puis son signe d'où découle celui de f.
- De façon analogue, si $h(x)$ est une fonction dont la dérivée est rationnelle, l'étude du signe de :

  $$w(x)h(x) + v(x)$$

  Où v, w sont des fractions rationnelles, se ramène à celle de :

  $$h(x) + \frac{v(x)}{w(x)}$$

C'est le cas lorsque $h(x)$ est de la forme :

$$\ln|u(x)| \quad \mathrm{Arctg}(u(x))$$

Où u est une fraction rationnelle.

Exemple 8.1. Etudions les variations la fonction définie par la relation :

$$y = f(x) = |\sin(x)|^{\cos(x)} \text{ donc } y = \mathrm{e}^z$$

Avec $z(x) = \cos(x) ln(|\sin(x)|)$ qu'on peut étudier sur $[0, \pi]$ vu que :

$$f(x + 2\pi) = y(x) \text{ et } f(-x) = f(x)$$

en tout point du domaine de définition de f. f et z sont alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \pi[$. Sur cet intervalle, il vient :

$$z'(x) = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)\ln(\sin(x))}{\sin(x)}$$

Seul le numérateur de cette expression nous intéresse puisqu'on en veut le signe :

$$g(x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \ln(\sin(x)) = h(\sin^2(x))$$

Où l'on a posé, pour $t \in]0, 1]$:

$$h(t) = 1 - t - \frac{t\ln(t)}{2}$$

h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ et :

$$h'(t) = -\frac{t+2}{2t^2} < 0 \text{ sur } [0, 1[$$

Les lecteurs achèveront alors l'étude des variations de f sur $]0, \pi[$.

8.2.2 Preuve d'inégalités

Exercice 23. En Etudiant une fonction convenable, démontrer, par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}^*$,*l'inégalité de la moyenne arithmético géométrique* valable pour tout système $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de réels positifs :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Substituer x^n à a_n et étudier la fonction de x ainsi obtenue.

Exercice 24. Trouver :

$$\inf\left\{\sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right),\ x>0, y>0\right\}$$

Exercice 25. Soient $x > 0, y > 0$. Démontrer les inégalités :

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^y < \mathrm{e}^x < \left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}$$

Exercice 26. Si $n \geq 3$ est un entier et $x \in \mathbf{R}_+$, démontrer l'inégalité :

$$x^n + (1+2x)^{\frac{n}{2}} \leq (1+x)^n$$

8.3 Utilisation de Taylor-Young

Ne pas oublier que lorsqu'on n'a besoin que de la valeur de plusieurs dérivées **en un seul point** il est souvent beaucoup plus simple de faire un développement limité autour de ce point.

Exemple 8.2. Calcul de $H_n(0)$ où les H_n ont été définis dans l'exemple 5.1.

Exercice 27. Calculer $f^{(n)}(0)$ avec :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$