Compléments d'algèbre linéaire

JPB

16 septembre 2001

Ce document suppose connu le cours de première année et fait référence à certains exemples de *"Méthodes et algorithmes de calcul en algèbre linéaire"*

Table des matières

1 Sommes de sous espaces 2
1.1 Somme ordinaire de sous espaces 2
1.2 Somme directe d'un nombre fini de sous espaces vectoriels . . 3
1.2.1 base adaptée à une somme directe, dimension 5

2 Sous espaces supplémentaires 6

3 Théorème du rang 7

4 Projecteurs, symétries 9
4.1 Projections et projecteurs 9
4.2 Symétries 11

5 Détermination et construction d'applications linéaires 11
5.1 Factorisation d'une application linéaire 13
5.2 Décomposition en blocs 13
5.2.1 Interprétation des blocs matriciels 13
5.2.2 Produit par blocs 15

6 Calcul de dimensions, construction de bases, utilisation de la dualité 18
6.1 Utilisation d'un isomorphisme avec un "espace de paramètres" 18

6.2 Utilisation de formes linéaires 18
6.2.1 Hyperplans 19
6.2.2 dimension du dual, duale d'une base 19
6.2.3 Réalisation d'un sous espace comme intersection d'hyperplans 21

1 Sommes de sous espaces

1.1 Somme ordinaire de sous espaces

Définition 1. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des sous espaces vectoriels, du $\mathbf{K}$ espace vectoriel E. L'ensemble :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

n'est pas, *en général*, un sous espace de E. Cependant :

$$\{\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_n} \ , \ (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n\}$$

Ce sous espace, appelé *somme des E_i* est noté :

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$$

Remarque 1. On observera que $\sum_{i=1}^{n} E_i = \operatorname{Im}\theta$ où θ est l'application linéaire de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n\}$ dans E définie par

$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \mapsto \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_n}$$

Exercice 1.
1. Soient A, B, C trois sous espaces d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E. Est-il vrai que :
$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C) \quad ?$$
2. Montrer que si les trois hypothèses suivantes sont réalisées :
$$A \cap B = A \cap C \ , \ A + B = A + C \ , \ B \subset C$$
alors $B = C$ et que ce résultat devient faux lorsqu'une des hypothèses manque.

Remarque 2 *(famille génératrice d'une somme et dimension). cf* plus loin la section consacrée aux sommes directes le théorème 2.

1.2 Somme directe d'un nombre fini de sous espaces vectoriels

Définition 2. On dit que les sous espaces $E_1, E_2, \dots, E_n$ de E sont **en somme directe** si, pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ appartenant à $E_1 + E_2 + \cdots + E_n$, la décomposition de $\overrightarrow{x}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_n} \ , \ (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$$

est unique. Ceci équivaut à la propriété suivante :

$$\forall (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,$$

$$\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2} = \cdots = \overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{0}$$

On note cette propriété sous la forme :

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

On remarquera qu'elle signifie que l'application θ définie dans la remarque 1 est un isomorphisme.

Exercice 2. $E = C^2([0,1], \mathbf{R})$. Prouver que :

$$F = \{y \in E \ , \ \forall x \in [0,1] \ , \ y"(x) + xy(x) = 0\}$$

$$G = \{y \in E \ , \ \forall x \in [0,1] \ , \ y"(x) - xy(x) = 0\}$$

et H l'ensemble des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ sont trois sous espaces de E en somme directe.

Exercice 3. Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle $I \subset]0, +\infty[$, à valeurs réelles. On considère les trois familles suivantes d'éléments de E :

$$(f_1, \dots, f_n) \ \text{ avec } \ f_i \ : \ x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i x}$$

$$(g_1, \dots, g_n) \ \text{ avec } \ g_i \ : \ x \mapsto x^{\alpha_i} \ln^{\beta_i}(x)$$

$$(h_1, \dots, h_n) \ \text{ avec } \ h_i \ : \ x \mapsto x^{\gamma_i}$$

où (α_i), (β_i), (γ_i), (λ_i) sont des suites strictement croissantes de n réels. Montrer que les sous espaces F, G, H, engendrés par ces trois familles sont

en somme directe dans les deux cas suivants :

$$I =]0,1[\qquad I =]1, +\infty[$$

[Pour les 5/2] que dire si I est un intervalle quelconque ?

Proposition 1. *Les deux sous espaces F et G de l'espace vectoriel E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.* **Ce Résultat est faux pour plus de deux sous espaces**

Exemple 1. Soient α, β deux éléments distincts d'un corps $\mathbf{K}$, posons $s = \alpha + \beta$, alors, si $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{Ker}(u^2 - su + pId) = \mathrm{Ker}(u - \alpha Id) \oplus \mathrm{Ker}(u - \beta Id)$$

On en déduira l'étude de certaines équations différentielles et récurrences linéaires .

Exercice 4.
1. Soient a, b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbf{N} \ , \ \exists (u,v) \in \mathbf{N}^2 \ , \ x = ua - vb$$
2. Soit $r \in \mathbf{N}^*$ et E_r l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que :
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \ , \ u_{n+r} = u_n$$
Prouver que E_r est un sous espace de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et que, si $r_1, r_2, \dots, r_p$ sont des naturels, tous non nuls et premiers entre eux deux à deux alors :
$$\sum_{i=1}^{p} E_{r_i} = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{r_i}$$

Exercice 5 (Utilise les polynômes). Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ des complexes distincts et tous non nuls. On note, pour $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$, E_λ l'ensemble des suites complexes (u_n) telles qu'il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ u_n = P(n)\lambda^n$$

Prouver que les E_{λ_i} sont en somme directe. *On suppose l'avoir prouvé pour $r-1$ suites, puis en envisageant une relation du type :*

$$\sum_{i=1}^{r} P_i(n)\lambda_i^n = 0$$

en notant u_n cette dernière suite, on considèrera $u_{n+1} - \lambda_r u_n$.

Exercice 6. Prouver une propriété d'associativité de la somme ordinaire et de la somme directe.

Théorème 1. *Soient* $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ *des scalaires distincts, u un endomorphisme d'un espace E, non nécessairement de dimension finie, alors :*

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id})$$

Corollaire 1. *Un système de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Exercice 7. Prouver que la famille $(f_1,\dots,f_p)$ suivante est libre dans le $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

1. $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, $E=\mathcal{C}(I,\mathbf{C})$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. f_i est la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i x}$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des complexes distincts.
2. $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $E=\mathcal{C}(I,\mathbf{R})$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. f_i est la fonction $x\mapsto \cos(\lambda_i x)$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des réels distincts.
3. $\mathbf{K}$ est un sous corps de $\mathbf{C}$. $P\in\mathbf{K}[X]$ de degré $p-1\geq 1$. $f_i=P(X+a_i)$ où $a_1,\dots,a_p$ sont des éléments distincts de $\mathbf{K}$.

Exercice 8. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ des scalaires distincts et $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que, si F est un sous espace de E, stable par u :

$$F\cap\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}) = \bigoplus_{i=1}^{p} F\cap \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id})$$

1.2.1 base adaptée à une somme directe, dimension

Théorème 2. *Soient* $E_1,E_2,\dots,E_p$ *des sous espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel E. On suppose que* E_i *admet une base* $(\overrightarrow{e_{i,1}},\overrightarrow{e_{i,2}},\dots,\overrightarrow{e_{i,n_i}})$. *La famille*

$$(e)=(\overrightarrow{e_{i,j}})_{(i,j)\in\Lambda} \quad \textit{où} \quad \Lambda=\{(i,j),\ 1\leq i\leq p \textit{ et } 1\leq j\leq n_i\}$$

est une famille génératrice de $F=\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$. *En outre :*

$$F=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i \quad \textit{si et seulement si } (e) \textit{ est une base de } F$$

Corollaire 2. *Si* $E_1,E_2,\dots,E_p$ *sont des sous espaces vectoriels de dimension finie d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel E :*

$$\dim\sum_{i=1}^{p} E_i \leq \sum_{i=1}^{p}\dim E_i$$

En outre :

$$\sum_{i=1}^{p} E_i=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i \quad \textit{si et seulement si} \quad \dim\sum_{i=1}^{p} E_i=\sum_{i=1}^{p}\dim E_i$$

Proposition 2 (Relation de Grassmann). *Soient F et G deux sous espaces de dimension finie d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel E. Alors il existe deux sous espaces* F' *et* G' *de E tels que :*

$$F=F'\oplus(F\cap G) \quad \textit{et} \quad G=G'\oplus(F\cap G)$$

Il vient alors :

$$F+G=F'\oplus G'\oplus(F\cap G)$$

On en déduit que $F+G$ *est de dimension finie et la relation de Grassmann :*

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$$

Exercice 9. (ENS) Soient $E_1,E_2,\dots,E_k$ des sous espaces d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Prouver que :

$$\sum_{i=1}^{k}\dim E_i > n(k-1) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} E_i \neq \{\overrightarrow{0}\}$$

2 Sous espaces supplémentaires

Définition 3 (Sous espaces supplémentaires). Les deux sous espaces F et G de l'espace vectoriel E sont dits *supplémentaires* si et seulement si

$$E=F\oplus G$$

ce qui équivaut à :

$$E=F+G \quad \text{et} \quad F\cap G=\{\overrightarrow{0}\}$$

Exemples 1. – Dans $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, les sous espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ constitués des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.
- Soit $B \in \mathbf{K}[X]$, de degré $n \geq 1$. Les sous espaces :

$$\mathcal{B} = \{BQ\ ,\ Q \in \mathbf{K}[X]\} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{n-1}[X]$$

sont deux sous espaces supplémentaires de $\mathbf{K}[X]$.
- Dans $\mathbf{K}(X)$, le sous espace $\mathbf{K}[X]$ et le sous espace $\mathcal{F}_-$ constitué des fractions rationnelles de degré strictement négatif sont supplémentaires.

Exercice 10. Soit $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$. On F l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ dont la restriction à $[x_{i-1}, x_i]$ est affine pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et G l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulles en les x_i. Prouver que E et F sont deux sous espaces supplémentaires de $C^0([0,1],\mathbf{R})$.

3 Théorème du rang

D'abord un résultat évident mais utile.

Proposition 3. *Soit f une application linéaire de E dans F et E' un sous espace de E.*

$$\operatorname{Ker} f_{|E'} = E' \cap \operatorname{Ker} f \qquad \operatorname{Im} f_{|E'} = f(E')$$

Théorème 3. *Soit f une application linéaire de E dans F et S un sous espace de E. Alors S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f_{|S}$ induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.*

Corollaire 3 (Théorème du rang). *Avec les notations précédentes, si E est de dimension finie, il en est de même de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ et :*

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \quad \textit{on définit} \quad \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$$

Exemple 2. Nouvelle preuve de la relation de Grassmann.

Proposition 4. *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, E' un sous espace de E :*

$$\operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$$

$$\dim f(E') = \dim E' - \dim E' \cap \operatorname{Ker} f$$

Proposition 5. *Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$:*

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$$

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$$

Remarque 3. Les applications linéaires "diminuent la dimension". On étudiera, sur les deux exemples ci-dessus, dans quels cas elles les conservent.

Corollaire 4 (Notations précédentes). *Si $\dim E = \dim F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *f injective.*
- *f surjective.*
- *f bijective.*

Application à l'interpolation de Lagrange : Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une famille d'éléments distincts de $\mathbf{K}$. L'application u :

$$P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$$

est linéaire de $\mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}^{n+1}$. Son noyau est constitué des multiples du polynôme $\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$. En outre u induit un isomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ sur $\mathbf{K}^{n+1}$.

Exercice 11. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ défini par :

$$\Delta P = P(X+1) - P(X)$$

Etudier le noyau et l'image de la restriction de Δ à $\mathbf{K}_n[X]$. Prouver que Δ est surjective mais pas injective.
Application. On note encore Δ la dérivation de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Prouver que si une suite $u = (u_n)$ vérifie $\Delta^p u = 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}_{p-1}[X]$ tel que, pour tout n, $u_n = P(n)$.

Exercice 12. Soient $F \subset G$ deux sous espaces de E. On suppose que F admet un supplémentaire de dimension finie dans E. Prouver qu'il en est de même de G.

Exercice 13 (Interpolation avec dérivées). Trouver les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ vérifiant les conditions suivantes :

$$P(0) = 1,\ P'(0) = 1,\ P(1) = -1,\ P'(1) = 0,\ P"(1) = 2$$

Exercice 14. On pose $\alpha = \sqrt[3]{2}$ et :

$$E = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \ / \ (a, b, c) \in \mathbf{Q}^3\}$$

Montrer que E est une $\mathbf{Q}$-algèbre et un corps.

4 Projecteurs, symétries

4.1 Projections et projecteurs

Définition 4 (Projection sur un sous espace parallèlement à un autre). Soient F et G deux sous espaces supplémentaires de E. L'application de E dans E qui associe à $\overrightarrow{x} \in E$ l'unique vecteur $\overrightarrow{f} \in F$ tel que $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{f} \in G$ est un endomorphisme de E dont le noyau est G et l'image est F. On l'appelle *projection sur F de direction G* et on la note $p_{G,F}$.

Exercice 15. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ suivants :

$$u = (1, -1, 0, 2) \qquad v = (1, 1, -1, 1)$$

et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. On note :

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ , \ \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - t = 0 \\ 2x - 3y + 4z - t = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Montrer que F et G sont des sous espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$. Déterminer $p_{F,G}$ et $p_{G,F}$.

Proposition 6. *Soient F et F' deux supplémentaires d'un sous espace G de E. Notons q la restriction à F de $p_{G,F'}$ et q' la restriction à F' de $p_{G,F}$, considérées comme applications à valeurs respectivement dans F' et F. Alors :*

$$q \circ q' = Id_{F'} \quad et \quad q' \circ q = Id_F$$

q est donc un isomorphisme de F sur F' d'inverse q'.

Définition 5 (Projecteurs). On appelle *projecteur* d'un espace vectoriel E tout endomorphisme de E tel que $p^2 = p$ ($p^2 = p \circ p$).

Proposition 7. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si :*

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\, u, \ u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$$

Autrement dit un projecteur induit l'identité sur son image. On retiendra que pour un projecteur p :

$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}\, p \Leftrightarrow p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$$

Proposition 8. *Si p est un projecteur de E, alors* Ker p *et* Im p *sont supplémentaires,* Im p=Ker $(p - Id)$ *et p n'est autre que la projection sur* Im p *de direction* Ker p. *Un projecteur est donc caractérisé par la donnée de son image et de son noyau. Si $E = F \oplus G$, la projection sur F de direction G est donc l'unique projecteur de noyau G et d'image F.*

Exercice 16. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E qui commutent. Montrer que

$$u = p + q - p \circ q$$

est un projecteur, déterminer son image et son noyau ? Etudier des exemples dans le cas où ils ne commutent pas

Exercice 17. Montrer qu'un sous espace F de E est stable par le projecteur p si et seulement si :

$$F = (F \cap \mathrm{Ker}\ p) \oplus (F \cap \mathrm{Im}\ p)$$

Exercice 18. Soient E_1 et E_2 deux sous espaces du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On suppose disposer d'un supplémentaire F_1 de $E_1 \cap E_2$ dans E_1 et d'un supplémentaire F_2 de E_2 dans $E_1 + E_2$. Prouver que F_1 et F_2 sont isomorphes.

Exercice 19. Soient F et G deux sous espaces de E admettant chacun un supplémentaire de dimension finie dans E. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire de dimension finie dans E (On pourra introduire un projecteur convenable). En notant $\mathrm{codim}(H)$ la dimension d'un supplémentaire de H, trouver une relation entre $\mathrm{codim}(F \cap G)$, $\mathrm{codim}(F)$, $\mathrm{codim}(G)$ $\mathrm{codim}(F + G)$.

Exercice 20. Soit π le projecteur de $\mathbf{K}[X]$ sur $\mathbf{K}_n[X]$ de direction $\mathrm{Vect}(X^{n+1})$ et T l'endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ défini par :

$$P \mapsto P \circ Q$$

Où Q est un polynôme de valuation 1. Prouver que $\pi \circ T$ induit un automorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$. En déduire que, si f est une application continue, strictement monotone sur un intervalle I contenant 0 admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, il en est de même de son application réciproque.

Exercice 21. soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles. On note :

$$u_k : n \mapsto \frac{1}{n^k} \quad \text{et} \quad v_k : n \mapsto \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}$$

On définit $E_k = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$, $F_k = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et G_k l'ensemble des suites négligeables devant $n \mapsto \frac{1}{n^k}$. Il s'agit clairement de sous espaces de $\mathcal{S}$, montrer que :

$$E_k \oplus G_k = F_k \oplus G_k$$

Quelle application voyez vous ?

4.2 Symétries

cf cours

5 Détermination et construction d'applications linéaires

Rappel 1 (Détermination d'une application linéaire sur une base). *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, E de dimension finie, muni d'une base $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. Si $(x) = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est un système de n vecteurs de F il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $u(\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{x_j}$. En outre :*

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$$

Il en résulte que :
- $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(x)$.
- *u est surjective si et seulement si $F = \mathrm{Vect}(x)$.*
- *u est injective si et seulement si (x) est une famille libre.*

Rappel 2 (Matrice et applications linéaires). *on reverra le cours de première année et en particulier les points suivants :*
- *Matrice d'un vecteur dans une base.*
- *Matrice de présentation d'un système de vecteurs dans une base. Leurs rangs sont égaux.*
- *Matrice d'une application linéaire dans deux bases : c'est la matrice de présentation, dans la base d'arrivée, du système des images des vecteurs de la base de départ. Lien entre les rangs de la matrice et de l'unique application linéaire qu'elle représente dans deux bases données.*

16 septembre 2001

- *Matrice de passage, son inverse. Formules de changement de bases pour un vecteur et une application linéaire.*

Rappel 3 (Interprétation matricielle des opérations élémentaires). *sur les lignes et les colonnes des matrices [cf mon papier méthodes et algorithmes].*

Rappel 4 (Forme canonique des matrices de rang r). *on se référera au cours de première année pratique à l'aide des opérations élémentaires [cf mon papier méthodes et algorithmes et les séances de Maple].*

Définition 6. Supposons que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et notons p_i le projecteur d'image E_i et de noyau $F_i = E = \bigoplus_{j \neq i} E_j$. Il vient alors :

$$\begin{cases} \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = Id \end{cases}$$

Le système $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ s'appelle système de projecteurs associés à la décomposition précédente de E en somme directe.

Exercice 22. Soit $(p_i)_{1 \le i \le n}$ une famille d'endomorphismes du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\forall i, j, \ p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$$

Que dire des p_i ? Prouver que $\mathrm{Im}\, p = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, p_i$

Proposition 9 (Détermination d'une application linéaire sur des sous espaces). *Supposons que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et soit, pour chaque i, u_i une application linéaire de E_i dans F. Il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle que :*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\ ,\ u_{|E_i} = u_i$$

Cette application linéaire u est définie par :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i$$

où $(p_1, \dots, p_n)$ est le système de projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

5.1 Factorisation d'une application linéaire

Proposition 10. *Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On se donne $w \in \mathcal{L}(E, G)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe $v \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $w = v \circ u$ est $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$*

Proposition 11. *Soient E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On se donne $w \in \mathcal{L}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $w = v \circ u$ est $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$*

Exercice 23. Soient $u, v, w \in \mathcal{L}(E)$. A quelle condition existe-t-il $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$w = a \circ u + b \circ v \quad \textit{resp} \quad w = u \circ a + v \circ b$$

Proposition 12 (Inverses latéraux). *Tous les espaces sont de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Une condition nécessaire et suffisante d'existence de $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = Id_E$ est l'injectivité de u. Une condition nécessaire et suffisante d'existence de $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ v = Id_F$ est la surjectivité de v. De plus, si $\dim(E) = \dim(F)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i *u est inversible à droite.*

ii *u est surjectif.*

iii *u est inversible à gauche.*

iv *u est injectif.*

v *u est inversible.*

vi *u est bijectif.*

Dans ces condition l'inverse à droite resp à gauche *de u est unique et coïncide avec u^{-1}. En Particulier la relation $u \circ v = Id_F$ équivaut à $v \circ u = Id_E$.*

5.2 Décomposition en blocs

5.2.1 Interprétation des blocs matriciels

Proposition 13. *E et F sont deux espaces de dimension finie sur $\mathbf{K}$, décomposés respectivement sous la forme :*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k \qquad F = \bigoplus_{l=1}^{n} F_l$$

Notons $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ le système de projecteurs associé à cette décomposition en somme directe.
On se donne des bases de E et F adaptées à ces décompositions :

$$(e) = (e_j)_{j \in J} \quad \textit{avec} \quad J = \bigcup_{k=1}^{p} J_k \quad \textit{et} \ (e_j)_{j \in J_k} \ \textit{est une base de} \ E_k$$

$$(f) = (f_i)_{i \in I} \quad \textit{avec} \quad I = \bigcup_{l=1}^{n} I_l \quad \textit{et} \ (f_i)_{i \in I_l} \ \textit{est une base de} \ F_l$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, posons :

$$A = (a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} = \operatorname{Mat}(u, (e), (f))$$

Alors, pour $1 \le k \le p$ et $1 \le l \le n$, la sous matrice :

$$A_{l,k} = (a_{i,j})_{(i,j) \in I_l \times J_k}$$

est la matrice de l'application linéaire

$$p_l \circ u_{|E_k} \in \mathcal{L}(E_k, F_l)$$

relativement au couple de bases $(e_j)_{j \in J_k}$, $(f_i)_{i \in I_l}$. On convient alors de représenter la matrice A sous forme du tableau des matrices $A_{l,k}$, ce qui s'écrit :

$$A = (A_{l,k})_{1 \le l \le n, 1 \le k \le p}$$

ou, plus concrètement :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{np} \end{array}\right)$$

Ces écritures s'appellent décomposition de A en blocs.

Démonstration. Soit $j \in J_k$, on calcule l'image de (e_j) par $p_l \circ u_{|E_k}$.

$$p_l \circ u_{|E_k}(e_j) = p_l(u(e_j)) = p_l\left(\sum_{i \in I} a_{ij} f_i\right)$$

$$= \sum_{i \in I} a_{ij} p_l(f_i) = \sum_{l'=1}^{n} \sum_{i \in I'_l} a_{ij} p_l(f_i)$$

or, pour $i \in I_{l'}$, $f_i \in F_{l'}$ et donc, si $l \neq l'$, $p_l(f_i) = 0$. La somme se réduit donc à :

$$\sum_{i \in I_l} a_{ij} p_l(f_i) = \sum_{i \in I_l} a_{ij} f_i$$

Pour $(i, j) \in I_l \times J_k$, l'élément d'indice (i, j) de la matrice de $p_l \circ u_{|E_k}$ dans les bases $(e_j)_{j \in J_k}$ et $(f_i)_{i \in I_l}$ est donc bien a_{ij}, ce qu'on voulait. □

Remarque 4. Les lecteurs définiront et dessineront les matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs *etc.*

5.2.2 Produit par blocs

Proposition 14. *Soient E, F, G trois espaces de dimension finie sur $\mathbf{K}$, décomposés respectivement sous la forme :*

$$E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j \qquad F = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k \qquad G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$$

On se donne des bases $(e) = ((e_1), \dots, (e_p))$, $(f) = ((f_1), \dots, (f_m))$, $(g) = ((g_1), \dots, (g_n))$, respectivement de E, F, G, adaptées aux décompositions de ces espaces en les sommes directes ci-dessus, autrement dit, (e_j) est une base de E_j, (f_k) est une base de F_k et (g_i) est une base de G_i. On considère :

$$u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{avec } A = \mathrm{Mat}(u, (e), (f))$$

$$v \in \mathcal{L}(F, G) \quad \text{avec } B = \mathrm{Mat}(v, (f), (g))$$

On peut décomposer ces matrices en blocs sous la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{array}\right) \qquad A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mp} \end{array}\right)$$

Soit alors

$$C = \mathrm{Mat}(v \circ u, (e), (g)) = BA$$

C se décompose en blocs sous la forme :

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1p} \\ \hline C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2p} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{np} \end{array}\right)$$

avec, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik} A_{kj}$$

Démonstration. Soit $(p_1, \dots, p_n)$ le système de projecteurs associés à la décomposition :

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$$

et $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ le système de projecteurs associés à la décomposition :

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m$$

On a vu plus haut :

$$C_{ij} = \mathrm{Mat}(p_i \circ (v \circ u)_{|E_j}, (e_j), (g_i))$$

Soit $x \in E_j$. La décomposition de $u(x)$ suivant les espaces F_k, s'écrit :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \left(u(x)\right)$$

donc :

$$v \circ u(x) = \sum_{k=1}^{m} v\left(\pi_k \left(u(x)\right)\right)$$

mais :

$$\left(\pi_k \left(u(x)\right)\right) \in F_k \quad \text{donc} \quad v\left(\pi_k \left(u(x)\right)\right) = v_{|F_k}\left(\pi_k \left(u(x)\right)\right)$$

d'où :

$$p_i \circ (v \circ u)_{|E_j} = \sum_{k=1}^{m} \left(p_i \circ v_{|F_k}\right) \circ \left(\pi_k \circ u_{|E_j}\right)$$

Le résultat voulu s'obtient en remarquant que :

$$A_{kj} = \mathrm{Mat}(\pi_k \circ u_{|E_j}, (e_j), (f_k))$$

et

$$B_{ik} = \mathrm{Mat}(p_i \circ v_{|F_k}, (f_k), (g_i))$$

et donc :

$$B_{ik}A_{kj} = \mathrm{Mat}\left(\left(p_i \circ v_{|F_k}\right) \circ \left(\pi_k \circ u_{|E_j}\right), (e_j), (f_i)\right)$$

□

Remarque 5. Les formules donnant le produit par blocs sont analogues aux formules donnant le produit habituel de deux matrices **mais attention les matrices ne commutent pas et donc l'ordre dans lequel on écrit le produit $B_{ik}A_{kj}$ est essentiel**. De même, il importe que tous les produits matriciels soient définis c'est-à-dire que les tailles des matrices soient compatibles entre elles.

Exercice 24. Etudier, par deux méthodes, le produit de deux matrices carrées diagonales *resp* triangulaires inférieures *resp* triangulaires supérieures par blocs.

Exemple 3 (Manipulations élémentaires sur les blocs). Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$. Chercher à quelle condition sur :

$$\{\lambda \in \mathbf{R},\ A - \lambda B \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{R})\}$$

la matrice $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B & \dots & B \\ B & A & \dots & B \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B & B & \dots & A \end{pmatrix}$$

est inversible et on donner la forme de son inverse.

6 Calcul de dimensions, construction de bases, utilisation de la dualité

6.1 Utilisation d'un isomorphisme avec un "espace de paramètres"

Exemple 4. Calculer la dimension de l'espace vectoriel des suites satisfaisant à la récurrence suivante :

$$u_{n+3} - 3nu_{n+2} + (n^2 - 1)u_n = 0$$

Exercice 25. Exhiber une base du sous espace de $\mathbf{R}^4$ constitué des vecteurs $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ satisfaisant à :

$$\begin{cases} mx + y - (m+1)z + mt = 0 \\ -x - my - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 26. Soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une subdivision de $[0, 1]$. Pour $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, E_k est l'ensemble des fonctions de classe C^{k-1} sur $[0, 1]$ dont la restriction à chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ est polynômiale de degré au plus k. Prouver que E_k est de dimension finie. Calculer $\dim E_k$ pour $k = 1$ et $k = 2$ puis pour $k \geq 3$. Montrer que la famille $(f_i)_{0 \leq i \leq n}$, où f_i est la fonction $t \mapsto |t - t_i|$, est une base de E_1 ; en déduire une base de E_2.

Exercice 27. Prouver que l'ensemble des matrices carrées de taille n dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est nulle est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. calculer sa dimension.

6.2 Utilisation de formes linéaires

Définition 7 (Formes linéaires). On appelle *forme linéaire* sur un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E, toute application linéaire de E dans $\mathbf{K}$. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ de ces formes linéaires est noté E^* et appelé *espace dual de E.*

Exemples 2.
- Les formes linéaires de $\mathbf{K}^n$ sont les applications de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}$ de la forme :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

- L'application de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{K}$ qui associe à la suite (u_n), l'élément u_0 est une forme linéaire.
- L'application $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire sur $C^0([a, b], \mathbf{R})$.

6.2.1 Hyperplans

Définition 8. L'image d'une forme linéaire non nulle sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est $\mathbf{K}$. Si H est un sous espace de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Il existe une droite D de E telle que :

$$E = H \oplus D$$

Un tel sous espace de E s'appelle un *hyperplan de* E.

Exercice 28. Montrer que :

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ , \ -x + 2y + 5z = 0\}$$

est un hyperplan. En donner un supplémentaire.

Exercice 29. Montrer que :

$$\left\{ y \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \ , \ \int_0^1 y(t)dt = \frac{y(0) + y(1)}{2} \right\}$$

est un hyperplan de $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. En préciser un supplémentaire.

Proposition 15. *Soit $H = \operatorname{Ker} \phi$ un hyperplan de E où ϕ une forme linéaire non nulle sur E. Alors l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur H est la droite vectorielle de E^* engendrée par ϕ. En particulier :*

$$\forall \phi, \psi \in E^* \ , \ \operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{K} - \{0\} \ , \ \psi = \lambda \phi$$

Une forme linéaire non nulle qui s'annule sur H s'appelle une équation de *H.*

6.2.2 dimension du dual, duale d'une base

Théorème 4. *Soit E un $\mathbf{K}$-Espace vectoriel, de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$. On note π_i la forme coordonnée d'indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ par rapport à (e) définie par :*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{e_j} \mapsto x_i$$

La famille $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ est une base de E^* appelée **base duale de la base** *(e). Plus précisément, si $\phi \in E^*$:*

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \pi_j \quad \textit{avec, pour } 1 \leq j \leq n \quad a_j = \phi(\overrightarrow{e_j}))$$

La matrice $A = (a_1, \ldots, a_n)$ est la matrice de ϕ dans le couple de bases (e), (1) et sa transposée est la matrice de présentation du vecteur $\phi \in E^*$ dans la base $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$.
Si $\overrightarrow{x} \in E$ se décompose dans la base (e) sous la forme :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{e_j} \quad \textit{alors} \quad \phi(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

Remarque 6. Si l'on note $U =^t (a_1, \ldots, a_n)$ la matrice de présentation du vecteur ϕ dans la base $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ de E^* et $X =^t (x_1, \ldots, x_n)$ la matrice de présentation du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base (e) de E, alors :

$$\phi(\overrightarrow{x}) =^t U X$$

Exercice 30. Soient $a < b < c$ des réels, prouver l'existence d'un unique triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3$ tel que pour toute fonction f polynômiale, de degré ≤ 2 sur $[a, c]$, on ait :

$$\int_a^c f(t)dt = \lambda f(a) + \mu f(b) + \nu f(c)$$

Interprétation ?

Exemple 5 (Base de $\mathcal{L}(E)$ associée à une base de E). Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, la famille (U_{ij}) d'endomorphismes de E définie par :

$$U_{ij}(\overrightarrow{x}) = \pi_j(\overrightarrow{x}) \overrightarrow{e_i}$$

est une base de $\mathcal{L}(E)$. Plus précisément :

$$\operatorname{Mat}(U_{ij}, (e)) = E_{ij}$$

6.2.3 Réalisation d'un sous espace comme intersection d'hyperplans

Proposition 16 (Calcul de la dimension par contraintes linéaires). *Soit* $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ *un système de forme linéaires sur* E *de dimension finie ou non et* $u \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R}^n)$ *défini par :*

$$x \mapsto (\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x))$$

alors : $\mathrm{rg}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = \mathrm{rg}\, u$

Exercice 31 (Voir aussi l'exercice 27). Trouver la dimension et une base du sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ constitué des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à la somme des éléments de chaque colonne.

Proposition 17. *Soit* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* F *un sous espace de* E *de dimension* p *avec* $0 \leq p \leq n-1$*. Il existe alors* $r = n - p$ *formes linéaires indépendantes* $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)$ *telles que :*

$$F = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\, \phi_i$$

De plus, $H = \mathrm{Ker}\, \phi$ *est un hyperplan qui contient* F *si et seulement si :*

$$\phi \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)$$

Exemple 6. Trouver la dimension et une base de l'intersection de deux sous espaces.

Exercice 32. Soient $(H_i)_{1 \leq i \leq p}$, p hyperplans d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer l'existence d'un hyperplan H tel que

$$\dim H \cap H_i < \dim H \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p$$

En déduire que E ne peut être réunion d'un nombre fini de sous espaces distincts de E (procéder par récurrence).