

TACS EN VRAC (SUP)

(TAC : Théorème à citer)

1. ALGÈBRE

- Soit A un anneau. Soit $(a, b) \in A^2$. Si a et b commutent ($ab = ba$), alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{et} \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Souvent, $a=1=1_A$

$$\text{Si } A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ avec } A^p = 0, (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n - A^p = I_n \Rightarrow (I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

- Formule de Pascal : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ ($0 \leq p < n$)

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- $P \in \mathbb{K}[X]$. $a \in \mathbb{K}$ racine de P de multiplicité $n \Leftrightarrow P(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$.

- Théorème de Bezout dans \mathbb{Z} ou dans $\mathbb{K}[X]$:

$$A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists (U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2 \text{ tq } AU + BV = 1$$

- Théorème de la division euclidienne dans \mathbb{Z} ou dans $\mathbb{K}[X]$:

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*, \exists ! (Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2 \text{ tq } A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

- Théorème de Gauss dans \mathbb{Z} ou dans $\mathbb{K}[X]$: $(A \wedge B = 1 \text{ et } A | BC) \Rightarrow A | C$

Idem avec n éléments deux à deux premiers entre eux.

- Si $\deg(P) \leq n$ et si P admet $(n+1)$ racines distinctes au moins, alors P est le polynôme nul.

- f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$. f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = E$.

- Théorème de Grassmann : Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de dimension finie de l'espace vectoriel E , sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

$$\text{Alors } \dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$$

- Théorème de la base incomplète : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit (u_1, \dots, u_p) une famille libre de E . Alors on peut trouver une base qui contient cette famille. De plus, si (v_1, \dots, v_q) est une famille génératrice de E , on peut compléter (u_1, \dots, u_p) en une base de E à l'aide de vecteurs de (v_1, \dots, v_q) .

- Théorème du rang : Soient E et F des espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Soit $u \in L(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E ($E = \text{Ker}(u) \oplus G$). Soit $v = u|_G$.

1) v induit un isomorphisme de G sur $\text{Im}(u) = u(E)$

2) Si E est de dimension finie, $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$

- Soient E et F 2 espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $u \in L(E, F)$.

Alors u injectif $\Leftrightarrow u$ surjectif $\Leftrightarrow u$ isomorphisme de E sur F .

- Si 2 endomorphismes coïncident sur une base, ils sont égaux.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit E un espace euclidien.

$$\text{Alors } \forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

- $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$

- $A \in M_n(\mathbb{K})$. On lui associe canoniquement $u \in L(\mathbb{K}^n)$ telle que $M_{Can}(u) = A$.

Alors $(y = u(x)) \Leftrightarrow ([y]_{Can} = A[x]_{Can}) \Leftrightarrow (Y = AX)$

Notation : Si $B = (e_1, \dots, e_n)$, alors $([x]_B = X \in M_{n,1}(\mathbb{K})) \Leftrightarrow \left(x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$.

- Formules de changement de base : B, B' bases de E , $x \in E$, $[x]_B = X$, $[x]_{B'} = X'$, $u \in L(E)$, $M = M_B(u)$, $M' = M_{B'}(u)$, $P : B \rightarrow B'$

Alors : $X = PX'$ et $M' = P^{-1}MP$

2. ANALYSE

I intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point, $S = [a, b]$ un segment, $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- Théorème de Bolzano-Weierstrass : De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

- Théorème des suites adjacentes : $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. a et b sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $b_n - a_n$ tend vers 0. Si a et b sont adjacentes, alors elles sont convergentes, de même limite l . Si $u_{2p} = a_p$ et $u_{2p+1} = b_p$, alors $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite l .

- Toute suite de réels croissante et majorée est convergente, de limite $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$.

- Théorème fondamental de l'analyse : $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue, $a \in I$. Si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, alors $F \in C^1(I)$ et $F' = f$. F est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a .

- Caractérisation séquentielle de la continuité : f continue au point $a \in I = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow$ (Pour toute suite $x_n \in I$, tendant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(a)$).

- Caractérisation des C^1 -difféomorphismes de I sur J ($k \geq 1, I$ et J intervalles de \mathbb{R}) :

$f : I \rightarrow J = f(I)$ est un C^1 -difféomorphisme de I sur $J \Leftrightarrow \forall t \in I, f'(t) \neq 0$.

On a alors $\forall x \in J = f(I), (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ou $\forall t \in I, (f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$.

Valable pour les fonctions à valeurs réelles uniquement :

- Théorème de la limite monotone : $a < b, f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Si f est monotone sur $]a, b[$, f admet en tout point $x_0 \in]a, b[$ une limite à droite et une limite à gauche.

Si f est croissante et minorée, $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ existe et vaut $\inf\{f(t) \mid a < t < b\}$.

- Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences :

1) L'image d'un intervalle (resp. un segment) par une fonction continue est un intervalle (resp. un segment).

2) Si $f \in C([a, b])$ et $f(a)f(b) \leq 0$, f s'annule sur $[a, b]$.

3) f continue sur I intervalle. Si f ne s'annule pas sur I , f garde sur I un signe constant.

- Une fonction numérique continue sur un segment est majorée, minorée et atteint ses bornes.

- Théorème de Heine-Borel : Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

- Théorème du prolongement dérivable : Si f est continue sur $S = [a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b[$ et si f' a une limite finie en a , alors f est C^1 sur $[a, b]$.
- Formule des Accroissements Finis (FAF) : $a \neq b$, si $f \in C([a, b]) \cap C^1(]a, b[)$, alors $\exists c \in]a, b[, \exists \theta \in]0, 1[$ tels que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) = (b - a)f'(a + \theta(b - a))$.
- Théorème de Rolle : $f \in C([a, b]) \cap C^1(]a, b[)$ et $f(a) = f(b)$
 $\Rightarrow \exists c \in]a, b[, \exists \theta \in]0, 1[, f'(c) = f'(a + \theta(b - a)) = 0$
- Formule de Taylor-Lagrange : Soit f de classe C^n sur $[a, b]$, $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que
$$f(b) = \sum_{p=0}^n \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Attention, c dépend de a, b et n .

Valable pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes : ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

- Inégalité des Accroissements Finis (IAF) : Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. Si f' est bornée sur $]a, b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{a < t < b} |f'(t)|$
- Formule de Taylor-Young : Soit $f \in C^n(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.
 Alors : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{p=0}^n \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a)$
- Inégalité de Taylor-Lagrange : Soit $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{K})$, $n \geq 1$.
 Alors : $\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
- Formule de Taylor avec reste intégral : Soit $f \in C^n([a, b], \mathbb{K})$, $n \geq 1$.
 Alors : $\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f^{(n)}(u) du$