

Fonction continue

I. Notion de continuité d'une fonction.

Propriétés : (admise)

1. Les **fonctions usuelles** (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

2. Toute fonction construite algébriquement (par somme, produit, inverse ou composée) à partir de fonctions usuelles est **continue sur tout intervalle** de son **ensemble de définition**.

3. On convient qu'une flèche oblique dans un tableau de variation traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

4. Une fonction dérivable sur un intervalle est **continue** sur cet intervalle.

Remarque :



Attention, la réciproque de cette dernière propriété est fausse.

Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Méthode : interpréter graphiquement la continuité d'une fonction.

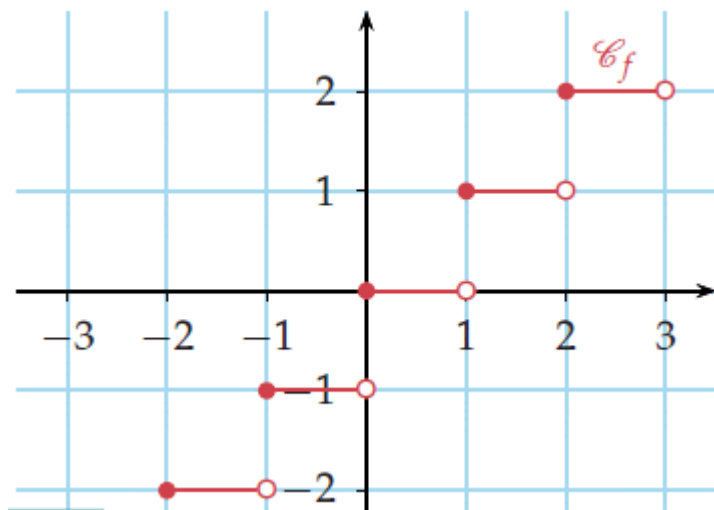
Par convention, une fonction est continue là où elle est tracée. S'il n'y a pas continuité en x_0 :

1. le symbole bille rouge indique le point de la courbe de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$;
2. le symbole bille rose vide indique un point qui n'appartient pas à la courbe mais dont l'ordonnée est égale à la limite à gauche ou à droite en x_0 .

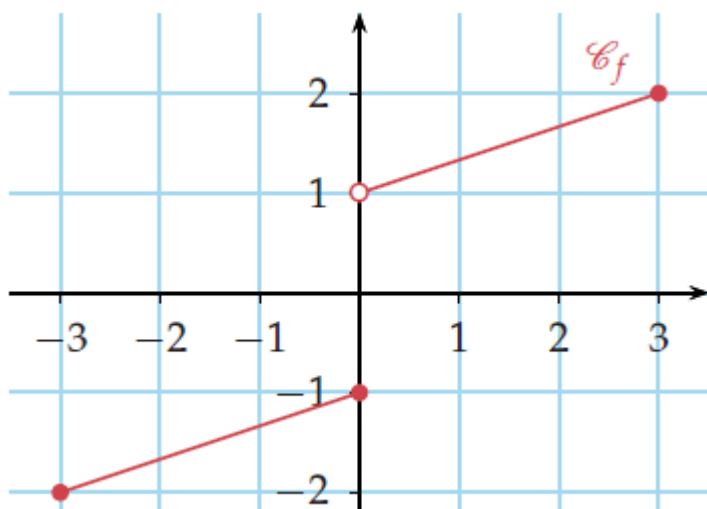
Exercice d'application :

Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est continue.

1) Soit la fonction partie entière $f : x \mapsto |x|$.



2) Soit la fonction f représentée ci-dessous.



II. Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème : cas général.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

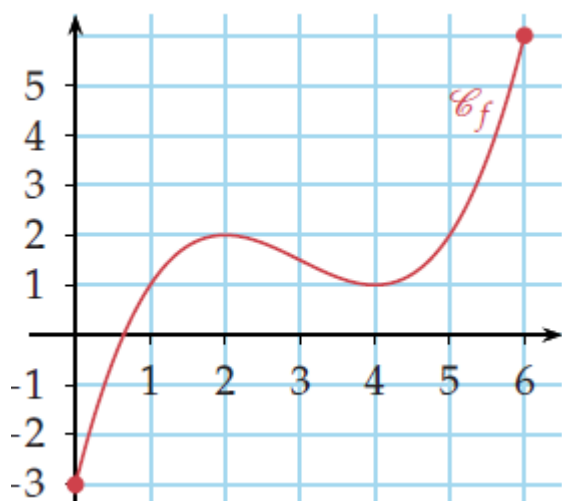
Remarque :

f prend au moins une fois toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a ; b]$ et, sur $[a ; b]$, la courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = k$ en un point au moins.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f . f admet pour minimum -3 et pour maximum 6 .
 f est continue sur $[0 ; 6]$.

a)

x	-1	3
$f(x)$	$+\infty$	0

b)

x	-2	0	3
$f(x)$	1	$+\infty$	2
		$-\infty$	

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3 ; 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0 ; 6]$.

Théorème : cas d'une fonction strictement monotone.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
 Si f est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c appartenant à $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.