Terminales S - Baccalauréat Blanc
Enseignement Obligatoire

– lundi 13 février 2012 –

Coefficient 7
Les sacs doivent être déposés au pied du tableau.
La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte 4 pages et deux pages d'annexes (pages 5 et 6).
Le candidat s'assurera que son sujet est complet.

Exercice 1

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. a. Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

b. Faire une figure et construire les points P et Q.

2. a. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.

b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
On suppose que l'origine O du repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. a. Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.

b. Montrer que $a + b + c = 0$.

c. Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$.

d. En utilisant la partie A, en déduire que $\frac{b}{a} = p$ ou $\frac{b}{a} = q$.

2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$.

a. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \frac{c-a}{b-a}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

Exercice 2

6 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$$

où k est un nombre réel donné.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.

2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
- la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$;
- la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe (à rendre avec la copie).

b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

Exercice 3

4 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. On a tracé, en annexe 1, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

a. Sur le graphique en annexe 1, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.

b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.

a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4
5 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.

2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».

Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\dfrac{7}{18}$.

3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.
Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\dfrac{4}{9}$.

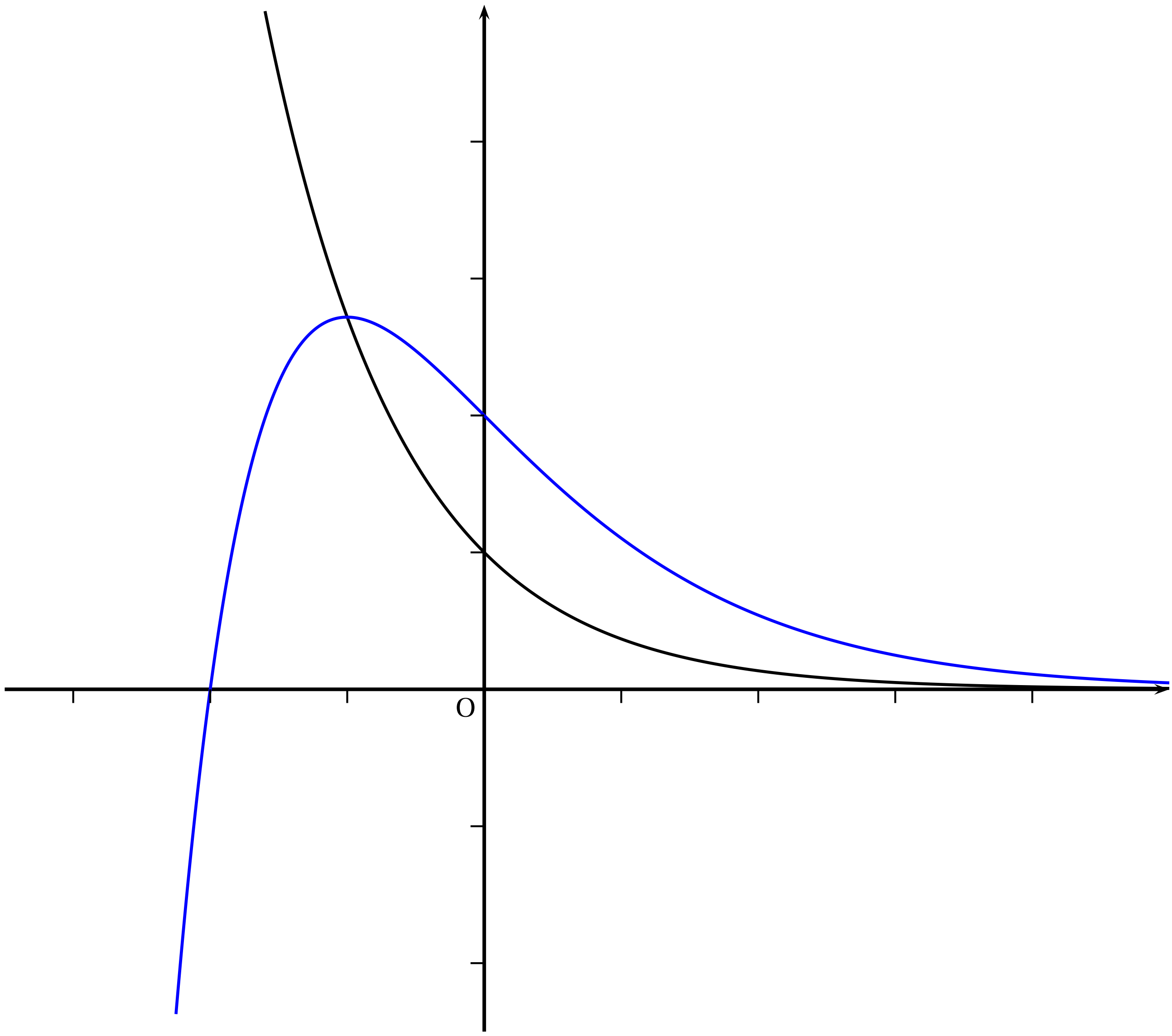
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Exercice 2

Annexe

Nom, Prénom et classe : ....

(**à rendre avec la copie**)



<u>Exercice 3</u> Annexe

(À rendre avec la copie)