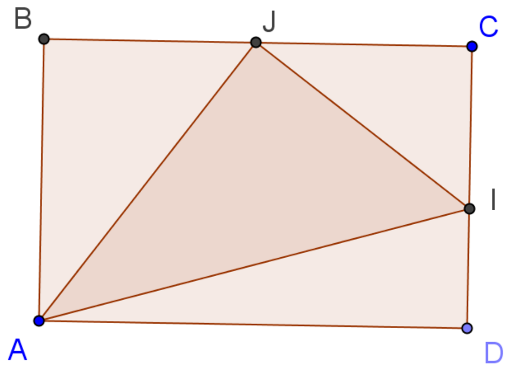
3ème A DS2 : théorème de Thalès et calcul littéral 2011-2012 sujet 1

Consignes : justifier les réponses en citant correctement les théorèmes utilisés.

Exercice 1 (6 points)

Dans la figure suivante, ABCD est un rectangle et les longueurs sont exprimées dans la même unité :

- AB = 120
- AD = 182
- JC = 92
- DI = 51



1) Les droites (IJ) et (BD) sont-elles parallèles ? (Justifier la réponse)
2) Calculer la longueur IJ.
3) Quelle est la nature du triangle AIJ ? (Justifier la réponse)

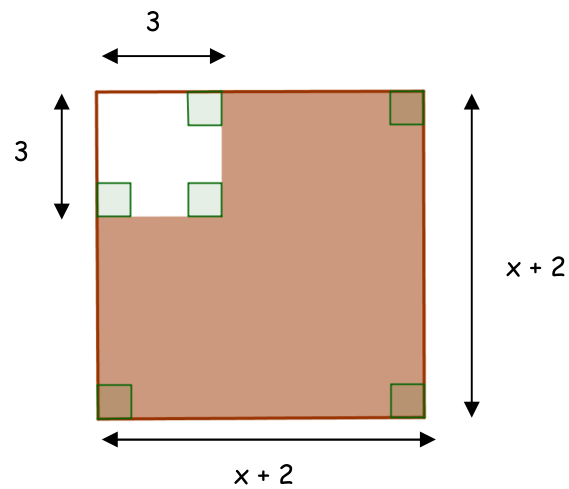
Exercice 2: (4,5 pts)
Développer et réduire les expressions suivantes :
$A = (5 - t)^2$
$B = (4x + 7)^2$

$C = (5 + 4g)(5 - 4g)$

Exercice 3: (4,5 pts)
Factoriser, si possible, les expressions suivantes :
$A = (2x + 1)^2 + (2x + 1)$
$B = (x + 7)^2 - 25$

$C = a^2 - 4a + 4$

Exercice 4: (5 pts)



1) Montrer que l'aire grisée est égale à $x^2 + 4x - 5$.

2) Donner la forme factorisée de cette aire.

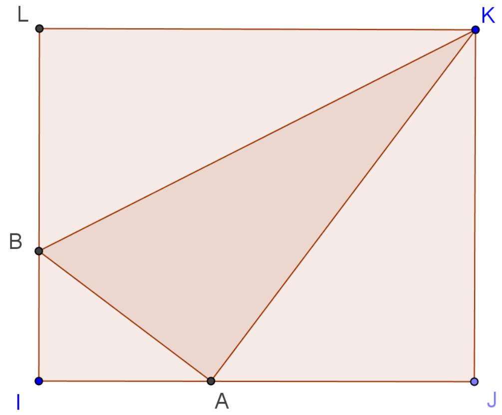
3) Justifier que pour $x = \frac{7}{2}$ l'aire grisée est supérieure à la moitié de l'aire du grand carré.

Consignes : justifier les réponses en citant correctement les théorèmes utilisés.

Exercice 1 (6 points)

Dans la figure suivante, IJKL est un rectangle et les longueurs sont exprimées dans la même unité :

- IL = 204
- AJ = 153
- IJ = 254
- BL = 129



1) Les droites (AB) et (JL) sont-elles parallèles ? (Justifier la réponse))

2) Calculer la longueur AB.

3) Quelle est la nature du triangle ABK ? (Justifier la réponse)

Exercice 2: (4,5 pts)

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (x + 3)^2$

$B = (2x - 5)^2$

$C = (3a - 2)(3a + 2)$

Exercice 3: (4,5 pts)

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

$A = 4a^2 + 4a + 1$

$B = (2x - 1)^2 + (2x - 1)$

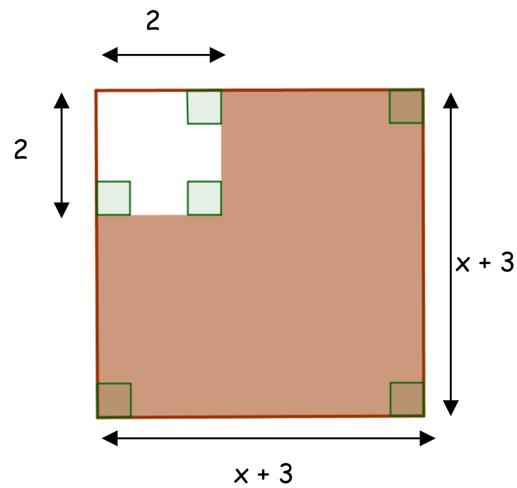
$C = (2x + 3)^2 - 16$

Exercice 4: (5 pts)

1) Montrer que l'aire grisée est égale à $x^2 + 6x + 5$.

2) Donner la forme factorisée de cette aire.

3) Justifier que pour $x = \frac{3}{2}$ l'aire grisée est supérieure à la moitié de l'aire du grand carré.

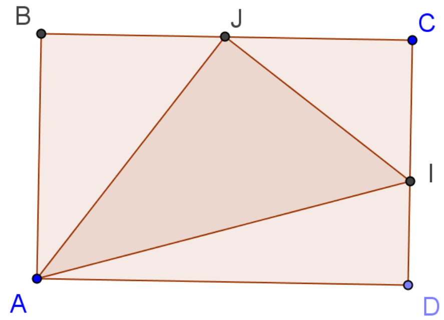


CORRECTION

Exercice 1 (6 points)

Dans la figure suivante, ABCD est un rectangle et les longueurs sont exprimées dans la même unité :

- AB = 120
- AD = 182
- JC = 92
- DI = 51



1) Les droites (IJ) et (BD) sont-elles parallèles ? (Justifier la réponse)
2) Calculer la longueur IJ.
3) Quelle est la nature du triangle AIJ ? (Justifier la réponse)

1) $\frac{CJ}{CB} = \frac{92}{182} = \frac{46}{91} \approx 0{,}505$ et $\frac{CI}{CD} = \frac{120 - 51}{120} = \frac{69}{120} = \frac{23}{40} = 0{,}575$

Les points C, J, B sont alignés ainsi que les points C, I et D dans le même ordre et $\frac{CJ}{CB} \neq \frac{CI}{CD}$;

donc selon la contraposée du théorème de Thalès les droites (IJ) et (BD) ne sont pas parallèles.

2) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle CIJ rectangle en C :

$$IJ^2 = IC^2 + JC^2$$

Soit : $IJ^2 = (120 - 51)^2 + 92^2 = 69^2 + 92^2 = 4761 + 8464 = 13225 = 115^2$

Donc IJ = 115

3) Calculons AJ^2 en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABJ rectangle en B : $AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = 120^2 + (182 - 92)^2 = 120^2 + 90^2 = 14400 + 8100 = 22\,500$

Calculons AI^2 en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ADI rectangle en D : $AI^2 = AD^2 + DI^2 = 182^2 + 51^2 = 33124 + 2601 = 35\,725$

$IJ^2 + AJ^2 = 13225 + 22500 = 35725$

On a donc $AI^2 = IJ^2 + AJ^2$

Donc selon la réciproque du théorème de Pythagore le triangle AIJ est rectangle en J.

CORRECTION

Exercice 2: (4,5 pts)

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (5 - t)^2$

$A = 5^2 - 2\times5\times t + t^2 = t^2 - 10t + 25$

$B = (4x + 7)^2$

$B = (4x)^2 + 2\times4x\times7 + 7^2$

$B = 16x^2 + 56x + 49$

$C = (5 + 4g)(5 - 4g)$

$C = 5^2 - (4g)^2 = 25 - 16g^2$

Exercice 3: (4,5 pts)

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

$A = (2x + 1)^2 + (2x + 1)$

$A = (2x + 1)[(2x + 1) + 1]$

$A = (2x + 1)(2x + 2)$

$A = 2(2x + 1)(x + 1)$

$B = (x + 7)^2 - 25$

$B = (x + 7)^2 - 5^2$

$B = [(x + 7) + 5][(x + 7) - 5]$

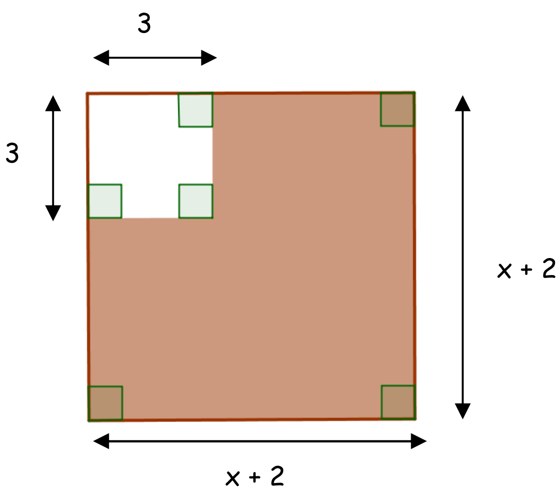
$B = (x + 12)(x + 2)$

$C = a^2 - 4a + 4$

$C = a^2 - 2\times2\times a + 2^2$

$C = (a - 2)^2$

Exercice 3: (5 pts)



1) Montrer que l'aire grisée est égale à $x^2 + 4x - 5$.

Aire grisée $= (x + 2)^2 - 3^2$

$= x^2 + 4x + 4 - 9$

$= x^2 + 4x - 5$

2) Donner la forme factorisée de cette aire.

Aire grisée $= (x + 2)^2 - 3^2$

$= (x + 2 + 3)(x + 2 - 3)$

$= (x + 5)(x - 1)$

3) Justifier que pour $x = \frac{5}{2}$ l'aire grisée est supérieure à la moitié de l'aire du grand carré.

CORRECTION

Pour $x = \frac{7}{2}$, aire grisée = $\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4\times\frac{7}{2} - 5 = \frac{49}{4} + 14 - 5 = \frac{49}{4} + 9 = \frac{85}{4}$

Pour $x = \frac{7}{2}$, aire du grand carré = $\left(\frac{7}{2} + 2\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$

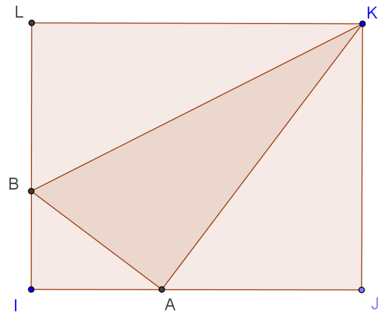
Et $\frac{85}{4} = \frac{170}{8} > \frac{1}{2}\times\frac{121}{4}$

Donc pour $x = \frac{7}{2}$ l'aire grisée est bien supérieure à la moitié de l'aire du grand carré.

CORRECTION

Exercice 1 (6 points)

Dans la figure suivante, IJKL est un rectangle et les longueurs sont exprimées dans la même unité :



- IL = 204
- IJ = 253
- AJ = 153
- BL = 129

1) Les droites (AB) et (JL) sont-elles parallèles ? (Justifier la réponse))
2) Calculer la longueur AB.
3) Quelle est la nature du triangle ABK ? (Justifier la réponse)

1) $\frac{IB}{IL} = \frac{204 - 129}{204} = \frac{75}{204} = \frac{25}{68} \approx 0,368$ et $\frac{IA}{IJ} = \frac{254 - 153}{254} = \frac{101}{254} \approx 0,398$

Les points I, B, L sont alignés ainsi que les points I, A et J dans le même ordre et $\frac{IB}{IL} \neq \frac{IA}{IJ}$,

donc selon la contraposée du théorème de Thalès les droites (AB) et (JL) ne sont pas parallèles.

2) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I :

$$AB^2 = AI^2 + IB^2$$

Soit : $AB^2 = (253 - 153)^2 + (204 - 129)^2 = 100^2 + 75^2 = 10000 + 5625 = 15625 = 125^2$

Donc AB = 125

3) Calculons BK^2 en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BKL rectangle en L : $BK^2 = BL^2 + LK^2 = 129^2 + 253^2 = 16641 + 64009 = 80\,650$

Calculons AK^2 en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AJK rectangle en J : $AK^2 = AJ^2 + JK^2 = 153^2 + 204^2 = 23409 + 41616 = 65\,025$

$AB^2 + AK^2 = 15\,625 + 65\,025 = 80\,650$

On a donc $BK^2 = AB^2 + AK^2$

Donc selon la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABK est rectangle en A.

CORRECTION

Exercice 2: (4,5 pts)
Développer et réduire les expressions suivantes :
$A = (x + 3)^2$

$A = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2$

$A = x^2 + 6x + 9$

$B = (2x - 5)^2$

$B = (2x)^2 - 2\times 2x\times 5 + 5^2$

$B = 4x^2 - 20x + 25$

$C = (3a - 2)(3a + 2)$

$C = (3a)^2 - 2^2 = 9a^2 - 4$

Exercice 3: (4,5 pts)
Factoriser, si possible, les expressions suivantes :
$A = 4a^2 + 4a + 1$
$A = (2a)^2 + 2\times 2a\times 1 + 1^2$

$A = (2a + 1)^2$

$B = (2x - 1)^2 + (2x - 1)$

$B = (2x - 1)[(2x - 1) + 1]$

$B = 2(2x - 1)x$

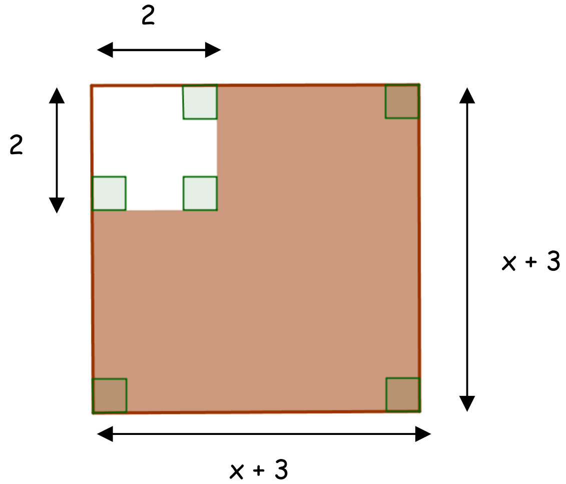
$C = (2x + 3)^2 - 16$

$C = (2x + 3)^2 - 4^2$

$C = [(2x + 3) + 4][(2x + 3) - 4]$

$C = (2x + 7)(2x - 1)$

Exercice 4: (5 pts)



1) Montrer que l'aire grisée est égale à $x^2 + 6x + 5$.

Aire grisée = $(x + 3)^2 - 2^2$ (différence des aires des deux carrés de côté (x+3) et 2)
Aire grisée = $x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5$

2) Donner la forme factorisée de cette aire.

Aire grisée $= (x + 3)^2 - 2^2$

$= [(x + 3) + 2][(x + 3) - 2] = (x + 5)(x + 1)$

3) Justifier que pour $x = \frac{3}{2}$ l'aire grisée est supérieure à la moitié de l'aire du grand carré.

CORRECTION

Pour $x = \frac{3}{2}$, aire grisée = $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6\times\frac{3}{2} + 5 = \frac{9}{4} + 9 + 5 = \frac{9 + 4\times14}{4} = \frac{65}{4}$

Pour $x = \frac{3}{2}$, aire du grand carré = $\left(\frac{3}{2} + 3\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

Or $\frac{65}{4} = \frac{130}{8} > \frac{1}{2}\times\frac{81}{4}$

Donc pour $x = \frac{3}{2}$ l'aire grisée est bien supérieure à la moitié de l'aire du grand carré.