Maths

Terminale Scientifique

SPÉCIALITÉ TS

Bac Blanc

Lycée René Cassin, Gonesse (Val d'Oise, France métropolitaine)

Modalités :

- Durée de l'épreuve : 4 heures ;
- **Rendre l'ANNEXE** avec votre nom et classe ;
- Calculatrice autorisée ;
- Répondre sur votre copie(s) et non sur le présent sujet sauf concernant la question **5.** de l'**exercice 2.** à compléter sur l'ANNEXE page 5 ;
- L'utilisation de documents manuscrits ou tapuscrits (hors le sujet présent) est interdite ;
- La rédaction et la clarté des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1. Commun à tous les candidats — 5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.

b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.

Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

c. Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

Exercice 2. Commun à tous les candidats 5 points

L'ANNEXE se rapporte à cet exercice.
Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ de l'ANNEXE.
On considère également la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$,

$$-\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right].$$

b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique donné en ANNEXE, en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathscr{C}$.

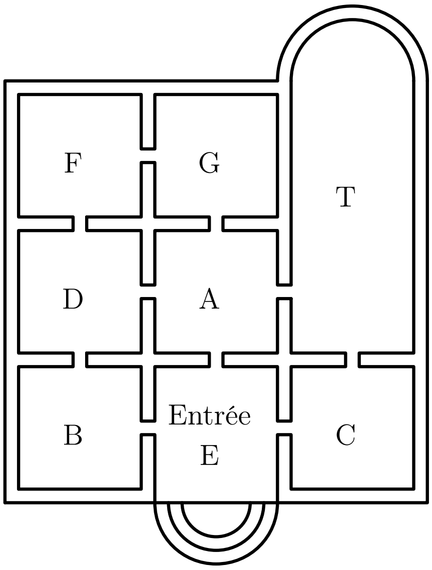
Exercice 3. Commun à tous les candidats 5 points

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.

Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

  Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :
- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.

b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 1)$.

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.

Prouver qu'il a tort.

Exercice 4. Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

N.B : Dans cet exercice, la question 5. peut être résolue indépendamment des quatre autres.

On considère l'équation (E) : $29u - 21v = 1$ où (u, v) est un couple d'entiers relatifs.

On note également (F) l'équation : $29x - 79y = 1$ où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

1. Expliquer brièvement pourquoi 29 et 21 sont premiers entre eux.

2. Vérifier que le couple $(8, 11)$ est une solution de l'équation (E).

3. **a.** Montrer que, si un couple (u, v) est une solution de (E), alors il existe un entier relatif k pour lequel

$$u = 8 + 21k \qquad \text{et} \qquad v = 11 + 29k$$

b. Justifier que la réciproque de la propriété énoncée en **a.** est vraie.

4. **a.** En remarquant que 79 est égal à $2 \times 29 + 21$, démontrer l'équivalence suivante

$$29x - 79y = 1 \iff 29(x - 2y) - 21y = 1$$

b. En déduire l'ensemble des couples (x, y) solutions de l'équation (F).

5. Ici, on cherche un couple (x, y) d'entiers relatifs vérifiant le système d'équations $\begin{cases} 29x - 79y = 1 \\ 105x - 286y = 1 \end{cases}$

On considère pour cela la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 29 & -79 \\ 105 & -286 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que la matrice B définie par $B = \begin{pmatrix} -286 & 79 \\ -105 & 29 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A, que l'on pourra noter A^{-1}.

N.B : On détaillera sur la copie les calculs justificatifs.

b. Résoudre alors, en utilisant le calcul matriciel, le système d'équations présenté plus haut.

ANNEXE : exercice 2