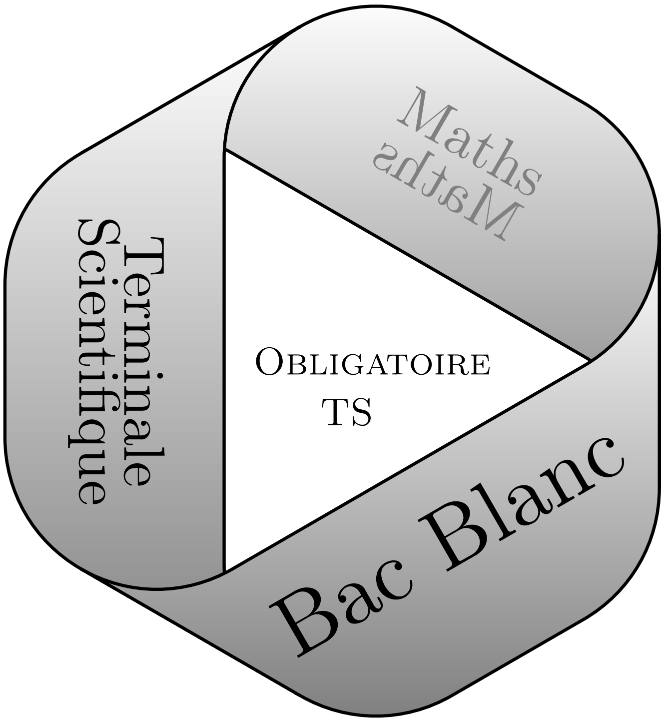


Lycée René Cassin, Gonesse (Val d'Oise, France métropolitaine)

Modalités :

- Durée de l'épreuve : 4 heures;
- **Rendre l'ANNEXE** avec votre nom et classe;
- Calculatrice autorisée;
- Répondre sur votre copie(s) et non sur le présent sujet sauf concernant la question **5.** de l'**exercice 2.** à compléter sur l'ANNEXE page 5;
- L'utilisation de documents manuscrits ou tapuscrits (hors le sujet présent) est interdite;
- La rédaction et la clarté des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1. Commun à tous les candidats — 5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.

b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.

Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

c. Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

Exercice 2. Commun à tous les candidats 5 points

L'ANNEXE se rapporte à cet exercice.
Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ de l'ANNEXE.
On considère également la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$-\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right].$$

b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

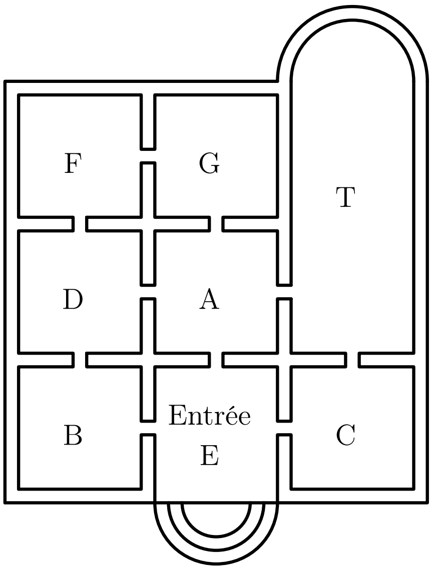
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique donné en ANNEXE, en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice 3. Commun à tous les candidats 5 points

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.

Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.
  Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :
- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.

b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\dfrac{1}{6}$.

c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 1)$.

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.
Prouver qu'il a tort.

Exercice 4. Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de **1. a** à **3. d** sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.

Chaque réponse convenable rapporte 0,5 point. Chaque réponse erronée enlève 0,2 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim\left(u_n+v_n\right) = 0$.
Affirmation 3. b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas.
Affirmation 3. c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. d	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

ANNEXE : exercice 2