Chapitre 17

Matrices

17.1 Définition d'une matrice

Définition 17.1 :
Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et deux entiers $n,p \geq 1$. On appelle *matrice* $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, une application

$$A : \begin{cases} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \mapsto & a_{ij} \end{cases}$$

que l'on note :

$$A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la ième ligne et de la jième colonne.
On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Remarque 194. Pour un indice de ligne $i \in [\![1,n]\!]$, on note $L_i = (a_{i1}, \dots ,a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$ le i^{e} *vecteur ligne* de A.
Pour un indice de colonne $j \in [\![1,p]\!]$, on note $C_j = (a_{1j}, \dots ,a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ le j^{e} *vecteur colonne* de A.

On définit les opérations suivantes sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ce sont les opérations usuelles sur les applications). Pour deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- $A = B$ ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = b_{ij}$.
- $A + B = ((c_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.A = ((d_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.
- La matrice nulle est définie par $0_{\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = ((f_{ij}))$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $f_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 17.2 : **Matrices de la base canonique**
Pour deux indices $k \in [\![1,n]\!]$ et $l \in [\![1,p]\!]$, on définit la *matrice élémentaire* $E_{kl} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$E_{kl} = ((\delta_{ik}\delta_{jl})) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de la matrice E_{kl} sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la ligne k et de la colonne l qui vaut 1.

Théorème 17.1 : **L'ensemble des matrices est un ev**
Muni des lois précédemment définies, l'ensemble $(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \times p$. Le système formé des $n \times p$ matrices E_{kl} est une base de cet ev, appelée *base canonique* de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

DÉFINITION 17.3 : **Transposée**
Soit une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de taille $n \times p$. On appelle *transposée* de la matrice A, la matrice ${}^tA \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$ {}^tA = ((\widetilde{a}_{i,j})) \text{ où } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ \widetilde{a}_{ij} = a_{ji} $$

L'application

$$ T : \begin{cases} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{cases} $$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

17.2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 17.4 : **Matrice d'un vecteur dans une base**
Soit un $\mathbb{K}$-ev $(E,n,\mathbb{K})$ de dimension finie n et une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E.
Soit $x \in E$ un vecteur qui se décompose sur la base e en :

$$ x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n $$

On appelle matrice de x dans la base e, la matrice $n \times 1$

$$ Mat_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) $$

DÉFINITION 17.5 : **Matrice d'un système de vecteurs dans une base**
Avec les notations précédentes, soit $S = (x_1, \dots, x_p)$ un système de p vecteurs de E, qui se décomposent dans la base e sous la forme

$$ x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i $$

On appelle matrice du système S dans la base e, la matrice $n \times p$ définie par :

$$ Mat_e(S) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) $$

DÉFINITION 17.6 : **Matrice d'une application linéaire dans deux bases**
Soient $(E,p,\mathbb{K})$ et $(F,n,\mathbb{K})$ deux espaces vectoriels de dimension p,n sur le même corps $\mathbb{K}$. Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in L(E,F)$ une application linéaire. On appelle matrice de u relativement aux bases e et f, la matrice

$$ Mat_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) $$

où

$$ \forall j \in [\![1,n]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i $$

En d'autres termes, c'est la matrice du système $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ dans la base f.

THÉORÈME 17.2 : **Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases**
Soit un espace vectoriel $(E,p,\mathbb{K})$ de dimension p, et $e=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Soit un espace vectoriel $(F,n,\mathbb{K})$ de dimension n et $f=(f_1,\dots,f_n)$ une base de f. Alors, l'application :

$$\phi_{e,f} : \left\{ \begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & Mat_{e,f}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 195. On en déduit donc le résultat précédemment admis :

$$\boxed{\dim L(E,F) = \dim E \times \dim F}$$

DÉFINITION 17.7 : **Matrice d'une forme linéaire dans une base**
Soit $(E,n,\mathbb{K})$ un espace de dimension n, et $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit $\phi \in E^\star$ une forme linéaire. La matrice de ϕ dans la base e est de taille $1\times n$:

$$Mat_e(\phi) = \big(\phi(e_1), \quad \dots \quad ,\phi(e_n)\big) \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$$

17.3 Produit matriciel

DÉFINITION 17.8 : **Produit de matrices**
Soit deux matrices $A=((a_{ij}))\in\mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B=((b_{ij}))\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit la *matrice produit* $AB=((c_{ij}))\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!] \quad \boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}}$$

THÉORÈME 17.3 : **Matrice d'une composée d'applications linéaires**
On considère trois $\mathbb{K}$-ev et deux applications linéaires :

$$(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (F,q,\mathbb{K}) \xrightarrow{v} (G,n,\mathbb{K})$$

Si e,f,g sont des bases de E,F,G, alors

$$Mat_{e,g}(v\circ u) = Mat_{f,g}(v)Mat_{e,f}(u)$$

THÉORÈME 17.4 : **Propriétés de la multiplication**
Soient $A\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B\in\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
- **Associativité :** $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$
- $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\cdot(A\times B)=(\lambda\cdot A)\times B = A\times(\lambda\cdot B)$

Si $A\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B,C\in\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a
- **Distributivité :** $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$

THÉORÈME 17.5 : **Produit et transposée**
Soit $A\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

THÉORÈME 17.6 : **Écriture matricielle d'une application linéaire**
Soit une application linéaire $(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (F,n,\mathbb{K})$, une base e de l'espace E et une base f de l'espace F. Soit un vecteur $x\in E$, et $X=Mat_e(x)$ sa matrice dans la base e. Notons $y=u(x)\in F$ et $Y=Mat_f(y)$ sa matrice dans la base f. Alors si $A=Mat_{e,f}(u)$ est la matrice de l'application linéaire u dans les deux bases e et f, on a l'égalité :

$$Y = AX$$

Théorème 17.7 :
Soient deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = BX$$

alors $A = B$.

Exercice 17-1

Soit deux applications linéaires

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y,\, x+y+z) \end{cases} \qquad v : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\, x+2y,\, x-y) \end{cases}$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) Ecrire $Mat_{e,f}(u)$ et $Mat_{f,e}(v)$

b) Ecrire $Mat_{e,e}(v \circ u)$ et $Mat_{f,f}(u \circ v)$

c) Donner l'expression analytique de $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 17-2

Soit $(E,n,\mathbb{K})$ un espace de dimension n et $u \in L(E)$ un endomorphisme. On suppose que $\forall \phi \in E^\star$, $\phi \circ u = 0_{E^\star}$.
Montrer que $u = 0_{L(E)}$.

17.4 L'algèbre des matrices carrées.

Définition 17.9 : **Matrice carrée**
On appelle *matrice carrée* d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, une matrice $n \times n$. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées.

Définition 17.10 : **Matrice d'un endomorphisme dans une base**
Soit un $\mathbb{K}$-ev $(E,n,\mathbb{K})$ et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit une base $e = (e_1,\dots,e_n)$ de E. On appelle matrice de l'endomorphisme u dans la base e, la matrice de l'application linéaire u relativement aux bases e et e :

$$Mat_e(u) = Mat_{e,e}(u)$$

Définition 17.11 : **Matrice identité**
On appelle $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. C'est la matrice de l'endomorphisme id_E dans *n'importe quelle* base de E.

Théorème 17.8 : **L'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
Muni des lois définies précédemment, l'ensemble des matrices *carrées* $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 et d'élément neutre I_n pour la multiplication.
Si e est une base de $(E,n,\mathbb{K})$, l'application

$$\phi : \begin{cases} \big(L(E), +, \cdot, \circ\big) & \longrightarrow & \big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times\big) \\ u & \mapsto & Mat_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Théorème 17.9 : **Produit de matrices canoniques**
Pour deux matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule importante suivante qui donne leur produit :

$$\boxed{E_{kl} E_{pq} = \delta_{lp} E_{kq}}$$

Exercice 17-3

Soit une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et deux indices $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$.

a) Déterminer les matrices AE_{kl} et $E_{kl}A$.

b) Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA$.

DÉFINITION 17.12 : **Trace d'une matrice carrée**
Soit une matrice *carrée* $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de matrice A, le scalaire

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

THÉORÈME 17.10 : **Propriétés de la trace**
L'application

$$Tr : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \operatorname{Tr}(A) \end{cases}$$

est une *forme linéaire* sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \boxed{\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)}$$

Exercice 17-4

Trouver toutes les formes linéaires ϕ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \phi(AB) = \phi(BA)$$

Calculs dans l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

1. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *commutatif* : en général

$$AB \neq BA$$

2. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *intègre* :

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Puisque $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, on a les formules suivantes : si $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, si $\boxed{AB = BA}$, et $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}} \qquad \text{(binôme)}$$

$$\boxed{A^p - B^p = (A-B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \dots + AB^{p-2} + B^{p-1})}$$

$$\boxed{(I_n - A^p) = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1})}$$

Remarque 196. On utilise souvent la formule du binôme pour calculer les puissances d'une matrice. La dernière formule est intéressante lorsqu'une matrice est *nilpotente* : $A^p = 0$.

Exercice 17-5

Soit A une matrice carrée nilpotente. Montrer que la matrice $(I - A)$ est inversible.

Exercice 17-6

Soit deux scalaires $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17-7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices A^2, A^3 et en déduire l'expression de la matrice A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Matrices de Jordan[1]

a) Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices J^2 et J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & & 0 \\ b & a & & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$

17.5 Matrices remarquables

17.5.1 Matrices scalaires

Ce sont des matrices de la forme

$$M = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

THÉORÈME 17.11 : L'ensemble des matrices scalaires est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ isomorphe à l'algèbre $(\mathbb{K}, +, \times, \cdot)$.

17.5.2 Matrices diagonales

Ce sont des matrices de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n), \quad (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{K}^n$$

THÉORÈME 17.12 : L'ensemble des matrices diagonales est une sous-algèbre de l'algèbre des matrices carrées $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n, isomorphe à l'algèbre $\mathbb{K}^n$.

Remarque 197. Le produit de deux matrices diagonales s'obtient en faisant le produit des éléments diagonaux :

$$\mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) \times \mathrm{Diag}(d'_1 \dots, d'_n) = \mathrm{Diag}(d_1 d'_1, \dots, d_n d'_n)$$

1. Camille Jordan, (05/01/1838- 22/01/1922), Français. Ses travaux portent sur la géométrie, (courbes de Jordan), mais également sur l'étude du groupe des permutations, et les séries de Fourier

17.5.3 Matrices triangulaires

Définition 17.13 :
Soit une matrice $L = ((l_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice L est *triangulaire inférieure* si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow l_{ij} = 0$$

Ce sont les matrices de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 17.14 :
Soit une matrice $U = ((u_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que cette matrice U est *triangulaire supérieure* ssi

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow u_{ij} = 0$$

Ce sont des matrices de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 17.13 :
L'ensemble des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 198. Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale.

17.5.4 Matrices symétriques, antisymétriques

Définition 17.15 : **Matrices symétriques, antisymétriques**
On dit qu'une matrice carrée A est *symétrique* ssi ${}^tA = A$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques.
On dit qu'une matrice carrée A est *antisymétrique* ssi ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Théorème 17.14 :
$\mathcal{S}_n$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\mathcal{A}_n$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$,

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$$

Remarque 199. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

17.6 Le groupe des matrices inversibles.

Définition 17.16 : **Matrices inversibles**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est *inversible* ssi il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Théorème 17.15 : **Elles forment un groupe**
L'ensemble des matrices inversibles $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe (non-commutatif) d'élément neutre la matrice identité I_n.

THÉORÈME 17.16 :
Soit $(E,n,\mathbb{K})$ un ev et $e = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. L'application

$$\phi_e : \begin{cases} (\mathcal{GL}(E),\circ) & \longrightarrow & (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times) \\ u & \mapsto & Mat_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

THÉORÈME 17.17 : **Caractérisation des matrices inversibles**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$;
2. A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $BA = I_n$;
3. A est inversible à droite : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = I_n$;
4. $\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$;
5. $\mathrm{rg}(A) = n$.

Exercice 17-9

Soient deux matrices carrées $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = 0$. Montrer que si A est inversible, alors $B = 0$.

Exercice 17-10

Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Montrer que la matrice ${}^tA$ est inversible et déterminer son inverse $({}^tA)^{-1}$.

Exercice 17-11

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible en utilisant l'algorithme du rang, puis déterminer son inverse A^{-1} en résolvant un système d'équations.

Exercice 17-12

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On pose $M = I + A$.

a) Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer la matrice ${}^tXAX$

b) En déduire que la matrice M est inversible.

Exercice 17-13

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ à *diagonale dominante* :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]^2, \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 17-14

Déterminer l'inverse de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a & 1 \end{pmatrix}$

17.7 Changement de bases

17.7.1 Matrices de passage

DÉFINITION 17.17 : **matrice de passage**
Soit un ev $(E,n,\mathbb{K})$ et deux bases $e = (e_1,\dots,e_n)$, $f = (f_1,\dots,f_n)$ de l'espace E. On appelle *matrice de passage* de la base e vers la base f, la matrice

$$\boxed{P_{e\to f} = Mat_e(f_1,\dots,f_n)}$$

Théorème 17.18 : **Inverse d'une matrice de passage**
Si e,f,g sont trois bases de $(E,n,\mathbb{K})$, alors

$$P_{e\to f} = Mat_{f,e}(\mathrm{id})$$

$$P_{e\to f}P_{f\to g} = P_{e\to g}$$

$$P_{e\to f} \text{ est inversible et } \boxed{P_{e\to f}^{-1} = P_{f\to e}}$$

Théorème 17.19 : **Une matrice inversible s'interprète en matrice de passage**
Soit une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une base e de l'espace $(E,n,\mathbb{K})$. Alors il existe une base f de E telle que
$$P = P_{e\to f}$$

17.7.2 Changement de coordonnées

Théorème 17.20 : **Pour un vecteur**
Soit un espace vectoriel $(E,n,\mathbb{K})$ et un vecteur $x \in E$. Soient deux bases e et f de l'espace E. On note
$$X = Mat_e(x), \quad X' = Mat_f(x)$$

La relation liant les matrices du même vecteur x dans deux bases différentes s'écrit :

$$\boxed{X = P_{e\to f}X'}$$

$$\underset{f}{E} \xrightarrow{\mathrm{id}_E} \underset{e}{E}$$

Théorème 17.21 : **Pour une application linéaire**
Soit une application linéaire $(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (F,n,\mathbb{K})$. Soient deux bases e,e' de E et deux bases f,f' de F.
$$A = Mat_{e,f}(u) \quad \text{et} \quad A' = Mat_{e',f'}(u)$$

Alors la relation liant les matrices d'une même application linéaire relativement à quatre bases différentes s'écrit :

$$\boxed{A' = P_{f'\to f}AP_{e\to e'}}$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{e}{E} \arrow[r, "u"] & \underset{f}{F} \arrow[d, "\mathrm{id}_F"] \\
\underset{e'}{E} \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "u"] & \underset{f'}{F}
\end{tikzcd}$$

Théorème 17.22 : **Pour une forme linéaire**
Soit une forme linéaire $(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$. Soient deux bases e et e' de E. Si l'on note $L = \mathrm{Mat}_e(\varphi) \in \mathfrak{M}_{1n}(\mathbb{K})$ et $L' = \mathrm{Mat}_{e'}(\varphi) \in \mathfrak{M}_{1n}(\mathbb{K})$, alors la relation liant les matrices de la même forme linéaire dans deux bases différentes s'écrit :
$$L' = LP_{e\to e'}$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{e}{E} \arrow[r, "\varphi"] & \underset{(1_{\mathbb{K}})}{\mathbb{K}} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
\underset{e'}{E} \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "\varphi"] & \underset{(1_{\mathbb{K}})}{\mathbb{K}}
\end{tikzcd}$$

Théorème 17.23 : **Pour un endomorphisme**
Soit un endomorphisme$(E,n,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (E,n,\mathbb{K})$. Soient deux bases e,e' de E. Notons $P = P_{e\to e'}$ la matrice de passage entre les deux bases, et

$$A = Mat_e(u), \quad A' = Mat_{e'}(u)$$

Alors, la relation liant les matrices du même endomorphisme dans deux bases différentes s'écrit :

$$Mat_e(u) = P_{e\to e'} Mat_{e'}(u) P_{e'\to e}$$

$$\boxed{A = PA'P^{-1}}$$

$$\begin{tikzcd} \underset{e}{E} \arrow[r, "u"] & \underset{e}{E} \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] \\ \underset{e'}{E} \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "u"] & \underset{e'}{E} \end{tikzcd}$$

Exercice 17-15

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, et les deux vecteurs $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (1,3)$.

a. Montrer que le système $f = (f_1,f_2)$ est une base de E.
b. Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice de passage $P_{e\to f}$.
c. Soit le vecteur $x = (4,1)$. Trouver matriciellement les coordonnées du vecteur x dans la base f.
d. Soit l'endomorphisme $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{cases}$. Écrire les matrices de cet endomorphisme dans les bases e et f : $Mat_e(u)$ et $Mat_f(u)$.

Exercice 17-16

$E = \mathbb{R}^2$. Déterminer tous les endomorphismes $u \in L(E)$ tels que :

$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(1,2), \text{ et } \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(1,1)$$

17.7.3 Matrices semblables

Définition 17.18 :
Soient $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices *carrées*. On dit qu'elles sont *semblables* ssi

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } B = PAP^{-1}$$

Remarque 200. Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 17.24 : **Deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes**
Soit un ev $(E,n,\mathbb{K})$ et deux matrices carrées $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et B sont semblables ssi il existe deux bases de E, e,e' et un endomorphisme $u \in L(E)$ tels que

$$A = Mat_e(u), \quad \text{et} \quad B = Mat_{e'}(u)$$

Théorème 17.25 : **Puissances de matrices semblables**
Si deux matrices A et B sont semblables : $A = PBP^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^k = PB^kP^{-1}}$$

Théorème 17.26 : **Deux matrices semblables ont même trace**
Si deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont même trace : $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Définition 17.19 : Trace d'un endomorphisme
Soit un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit une base e quelconque de l'espace E. On appelle trace de l'endomorphisme u, la trace de la matrice $Mat_e(u)$. Ce scalaire ne dépend pas de la base e choisie pour le calculer.

Exercice 17-17

Soient deux matrices semblables $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les matrices ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

Exercice 17-18

Déterminer l'expression analytique de la projection sur $F = \text{Vect}(1,2)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(1,-1)$.

Exercice 17-19

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 17-20

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 17-21

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$. Montrer que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 17-22

Soit un ev $(E,n,\mathbb{R})$ de dimension n et un endomorphisme $u \in L(E)$ nilpotent d'indice n. Montrer que $\text{Tr}(u) = 0$.

Exercice 17-23

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'endomorphisme $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$. Écrire la matrice de D dans la base canonique. Quelle-est la base la mieux adaptée pour représenter D ?

17.8 Rang d'une matrice

Définition 17.20 : rang
Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ rectangulaire et $C_1,\dots,C_p \in \mathbb{K}^n$ ses vecteurs colonnes.
On appelle *rang* de la matrice A, le rang du système de vecteurs $(C_1,\dots,C_p)$ dans l'espace $\mathbb{K}^n$.

Proposition 17.27 : Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire qu'elle représente
Soit deux espaces vectoriels $(E,p,\mathbb{K})$, $(F,n,\mathbb{K})$ munis de deux bases e et f. Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. On sait qu'il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que $\text{Mat}_{e,f}(u) = A$. Alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(u) = \dim \text{Im}\, u$$

Définition 17.21 : Matrice $I_r(n,p)$
Soient deux entiers n, p et un entier $r \leq \min(n,p)$. On définit la matrice

$$I_r(n,p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \dots 0 \end{pmatrix}$$

On a $\text{rg}\big(I_r(n,p)\big) = r$.

Théorème 17.28 : Caractérisation du rang
Soit une matrice rectangulaire $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. Soit $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Alors

$$\underbrace{\big(\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ telles que } A = PI_r(n,p)Q\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(\mathrm{rg}(A) = r\big)}_{(ii)}$$

Remarque 201. Étudier la démonstration de $(ii) \Rightarrow (i)$: elle est typique de construction de bases adaptées.

Théorème 17.29 : Une matrice et sa transposée ont même rang
Soit une matrice rectangulaire $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$$

Remarque 202. Comme conséquence, on peut utiliser à la fois les lignes et les colonnes dans l'algorithme du rang.
Remarque 203. On définit sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ une relation d'équivalence par :

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})^2, \quad A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ telles que } A = PBQ$$

Si $A\mathcal{R}B$, on dit que les matrices A et B sont *équivalentes*. Cette relation est plus simple que la relation de similitude : deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Exercice 17-24

Montrer que deux matrices semblables ont même trace et même rang.
Trouver deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de même rang et même trace qui ne sont pas semblables.

Exercice 17-25

Endomorphismes de rang 1

a. Soit $(E,n,\mathbb{K})$ et un endomorphisme $f \in L(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
b. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\underbrace{\big(\mathrm{rg}(A) = 1\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(\exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^2\ A = X\,{}^tY\big)}_{(ii)}$.
