Chapitre 13

Espaces vectoriels

13.1 Structure de corps

Définition 13.1 : **Corps**
On considère un ensemble K muni de deux lois de composition interne, notées $+$ et $\times$. On dit que $(K, +, \times)$ est un *corps* si et seulement si :
1. $(K, +, \times)$ est un anneau ;
2. tout élément non-nul de K est inversible pour la loi $\times$.

`Exemple 25.` $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps, mais $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'en est pas un car les seuls éléments inversibles sont 1 et -1.

Proposition 13.1 : **Un corps est un anneau intègre**
Dans un corps $(\mathbb{K},+,\times)$, si deux éléments $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ vérifient $x \times y = 0_K$, alors $x = 0_K$ ou $y = 0_K$.
En particulier, on peut « simplifier par un élément non nul » :

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{K}^3,\ a \neq 0_K, \quad a \times x = a \times y \Rightarrow x = y$$

Définition 13.2 : **Sous-corps**
Soit $K' \subset K$ un sous-ensemble d'un corps $(K, +, \times)$. On dit que la partie K' est un *sous-corps* du corps K si et seulement si :
1. K' est un sous-anneau de l'anneau $(K, +, \times)$;
2. l'inverse de tout élément non-nul de K' est dans K'.

Définition 13.3 : **Morphisme de corps**
Une application f entre deux corps $(K,+,\times)$ et $(K',+,\times)$ est un morphisme de corps si et seulement si c'est un morphisme d'anneaux.

Théorème 13.2 : **Calcul d'une somme géométrique dans un corps**
Soit un élément $k \in K$ du corps $(K, +, \times)$. Alors la formule suivante permet de calculer une progression géométrique de raison k :

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = 1 + k + k^2 + \cdots + k^n = \begin{cases} (1-k)^{-1}\big(1 - k^{n+1}\big) & \text{si } k \neq 1 \\ (n+1)1_K & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

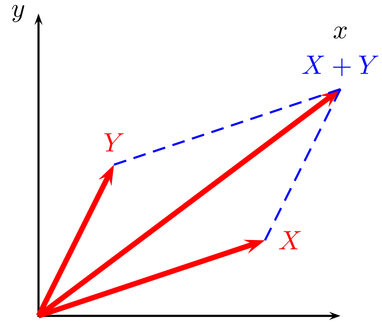


FIG. 13.1 – *Addition de vecteurs dans* $\mathbb{R}^2$.

13.2 Espaces vectoriels

DÉFINITION 13.4 : **Espace vectoriel**
Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ tout ensemble E muni d'une lci $+$ et d'une loi de composition *externe*

$$\begin{cases} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{cases}$$

vérifiant :

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif,
2. $\forall (\lambda,\mu) \in K^2$, $\forall (x,y) \in E^2$:
   (a) $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
   (b) $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
   (c) $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
3. $\forall x \in E$, $1_K \cdot x = x$

On dit aussi que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les éléments de E s'appellent les *vecteurs* et les éléments de K les *scalaires*. L'élément neutre pour $+$, est noté 0_E et s'appelle le *vecteur nul*.

Exemples
a) Si K est un corps commutatif, on définit une loi externe en posant pour $\lambda \in K$ et $x \in K$, $\lambda \cdot x = \lambda \times x$. Muni de « $+$ » et « $\cdot$ », K a une structure de K-ev.
b) Si $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$, on définit l'addition de deux vecteurs: $X = (x_1,x_2)$, $Y = (y_1,y_2)$ $X+Y = (x_1+y_1,x_2+y_2)$ et la multiplication d'un scalaire par un vecteur : Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot X = (\lambda x_1,\lambda x_2)$. Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ a une structure de $\mathbb{R}$-ev. On peut représenter un vecteur $X = (x_1,x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par une flèche joignant le point $(0,0)$ au point (x_1,x_2). L'addition de deux vecteurs s'obtient en traçant un parallélogramme.

PROPOSITION 13.3 : **Espace produit**
Soit K un corps commutatif et $E_1,\dots,E_n$ des K-ev. On définit sur $E_1 \times \dots \times E_n$ les lois :

$$(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1,\dots,x_n) = (\lambda \cdot x_1,\dots,\lambda \cdot x_n)$$

et alors $(E_1 \times \dots \times E_n,+,\cdot)$ est un K-ev. Le vecteur nul est $(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$.

En particulier, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-ev.

PROPOSITION 13.4 : **Espaces de fonctions**
Soit A un *ensemble* quelconque et E un K-ev. On note $\mathcal{F}(A,E)$ l'ensemble des fonctions de A vers E. On définit alors deux lois sur $\mathcal{F}(A,E)$:

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(A,E), \quad (f+g) : \begin{cases} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{cases}$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(A,E), \forall \lambda \in K, \quad \lambda \cdot f : \begin{cases} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{cases}$$

Alors $\Big(\mathcal{F}(A,E),+,\cdot\Big)$ est un K-ev.

COROLLAIRE 13.5 : Espace de suites
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni des lois $+$ et $\cdot$ est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\big(\mathcal{S}(E), + , \cdot\big)$.

PROPOSITION 13.6 : Règles de calcul dans un ev
pour tout (λ,μ) dans $\mathbb{K}^2$, pour tout (x,y) dans E^2, on a :

$$(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$$

$$0_K \cdot x = 0_E$$

$$\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$$

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E$$

$$(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$$

$$(\lambda \cdot x) = 0_E \iff (\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E)$$

On écrira désormais λx à la place de $\lambda \cdot x$ lorsque la confusion ne sera plus à craindre.

13.3 Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 13.5 : Sous-espaces vectoriels
Soit $(E, + , \cdot)$ un K-ev et $F \subset E$ une partie de E. On dit que F est un sev de E si et seulement si :
1. $0_E \in F$
2. $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in K^2$, $\lambda x + \mu y \in F$ (on dit que F est *stable par combinaisons linéaires*).

PROPOSITION 13.7 : Un sev a une structure d'espace vectoriel
Si F est un sev de E, alors muni des lois restreintes à F, F est un K-ev.

Remarque 129. Si E est un espace vectoriel, alors les parties $\{0_E\}$ et E sont toujours des sev de E.
`Exemple 26.` Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, toutes les droites passant par l'origine :

$$F = \{\lambda(x_0,y_0) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 13-1
Soit l l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 13-2
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sev de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
1. $F = \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$;
2. $F = \{f \in F \mid f(1) = 2f(0)\}$;
3. $F = \{f \in F \mid f(0) = f(1) + 1\}$;
4. $F = \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1 - x)\}$;
5. $F = \{f \in F \mid f$ dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a(x)f(x)\}$ où $a \in E$.
6. $F = \{f \in F \mid f$ dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a(x)f^2(x)\}$ où $a \in E$.

THÉORÈME 13.8 : L'intersection de sev est un sev
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sev de E.

Exercice 13-3
Montrer que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-ev.

DÉFINITION 13.6 : Espace vectoriel engendré par une partie
Soit un K-ev E et une partie $A \subset E$ de E. On appelle *sous-espace engendré* par la partie A, le plus petit sev de E contenant A. On note $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des sev de E contenant A, alors :

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$$

Théorème 13.9 : Caractérisation de $\text{Vect}(A)$
Si $A \neq \emptyset$, $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* d'éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, (a_1, \dots, a_n) \in A^n\}$$

Exercice 13-4
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le sev engendré par $A = \{(1,1,1),(1,0,1)\}$

Exercice 13-5

1. Si $A \subset B$, montrer que $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
2. Si F est un sev, montrer que $\text{Vect}(F) = F$.
3. Montrer que $\text{Vect}\big(\text{Vect}(A)\big) = \text{Vect}(A)$.

Exercice 13-6
Dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite :

$$e_n = (0,0,\dots,0,1,0\dots)$$

(tous les termes de la suite sont nuls sauf le nième qui vaut 1). Déterminer le sev engendré par la partie $A = \{e_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Définition 13.7 : Somme de sev
Soit E un K-ev et $F_1, \dots, F_n$ des sev de E. On appelle *somme* des sev F_i, l'ensemble

$$F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n \ ; \ x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n\}$$

Théorème 13.10 : Caractérisation de $\text{Vect}(F_1 + \dots + F_n)$
$F_1 + \dots + F_n$ est un sev de E et

$$F_1 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$$

Exercice 13-7
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x,0,0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,x,0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que ce sont des sev et déterminer le sous espace $F + G$.

Définition 13.8 : Somme directe
Soient deux sev F_1, F_2 de l'espace vectoriel E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est *directe* si et seulement si tout vecteur de $F_1 + F_2$ s'écrit de façon *unique* $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. On note alors $F_1 \oplus F_2$ cette somme.

Théorème 13.11 : Caractérisation d'une somme directe
Soient deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E. On a la caractérisation suivante d'une somme directe :

$$\boxed{F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$$

Définition 13.9 : Sous-espaces supplémentaires
On dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E si et seulement si :

$$E = F_1 \oplus F_2$$

Remarque 130. Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon *unique* sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F_1, \ x_2 \in F_2$$

Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$:

1. Montrons que la somme est directe, c'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $x \in F_1 \cap F_2 \dots$ donc $x = 0_E$.
2. Montrons que $E = F_1 + F_2$: soit $x \in E$. Posons $x_1 = \dots$ et $x_2 = \dots$. On a bien $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ et $x = x_1 + x_2$.

Remarque 131. Ne pas confondre *supplémentaire* avec *complémentaire* : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (il ne contient pas le vecteur nul).

Remarque 132. Il existe en général une infinité de supplémentaires d'un sous-espace vectoriel. Ne pas parler *du* supplémentaire d'un sev.

Exercice 13-8

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sev

$$F = \text{Vect}\big((1,2,-1,0),(0,2,0,1)\big) \text{ et } G = \text{Vect}\big((2,0,0,1),(1,0,0,1)\big)$$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 13-9

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires. Montrer que

$$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$$

13.4 Sous-espaces affines

Définition 13.10 : **Sous-espace affine**
On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un *sous-espace affine* de E si il existe un élément a de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{a + \overrightarrow{f} \mid \overrightarrow{f} \in F\}$$

On note alors $\mathcal{F} = a + F$. On dit que : le sev F est la *direction* du sous-espace affine $\mathcal{F}$;

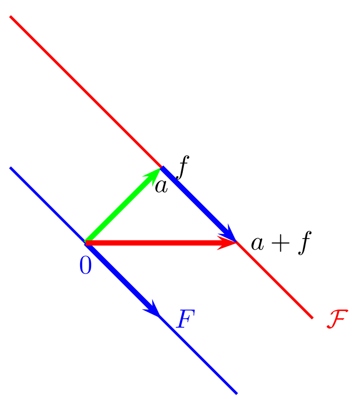


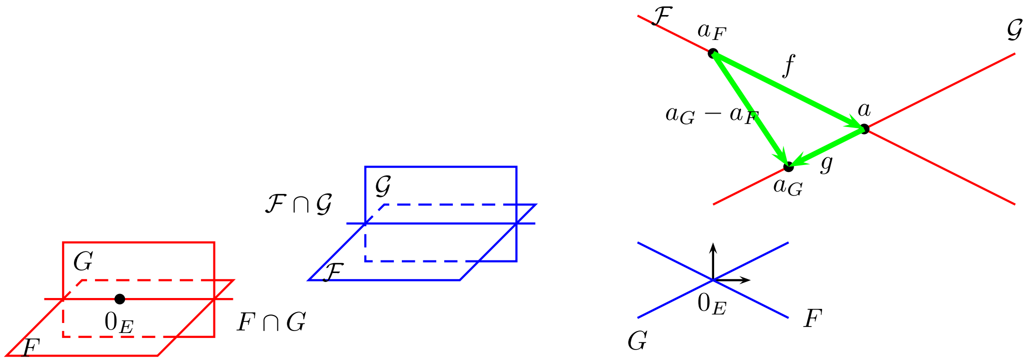
Fig. 13.2 – *Sous-espace affine*

Lemme 13.12 : **Indépendance d'un vecteur particulier**
Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, alors pour tout élément $a' \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a' + F$.

Définition 13.11 : **Sous-espaces affines parallèles**
On dit que le sous-espace affine $\mathcal{G}$ de direction G est *parallèle* au sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F lorsque $G \subset F$.

Remarque 133. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite peut être parallèle à un plan, mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite.

Théorème 13.13 : **Intersection de sous-espaces affines**
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions F et G. Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction le sous-espace vectoriel $F \cap G$.



(a) Sous-espaces affines parallèles

(b) Sous-espaces affines supplémentaires dans le plan

FIG. 13.3 – *Intersection de sous-espaces affines*

PROPOSITION 13.14 : **Intersection de deux sous-espaces affines de directions supplémentaires**
Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de directions F et G, avec

$$E = F \oplus G$$

Alors leur intersection est un singleton : $\exists a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{a\}$.

13.5 Systèmes libres, générateurs

DÉFINITION 13.12 : **Système de vecteurs**
Un système de vecteurs est un n-uplet $S = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E.

Remarque 134. On parle également de *famille finie* $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs où I est un ensemble fini.

DÉFINITION 13.13 : **Système libre**
On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$ est *libre* si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n,\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$$

Sinon, on dit que le système est *lié*.

Pour montrer qu'un système est libre :
1. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$;
2. ... donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$

PROPOSITION 13.15 : **Propriétés des systèmes liés**
Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ un système de vecteurs de E.
- a. Si l'un des vecteurs est nul, le système est lié ;
- b. Si l'un des vecteurs du système apparaît plus d'une fois dans S, le système est lié ;
- c. Si le système est lié, l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs du système :

$$\exists i \in [1,n],\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \in K^{n-1} \text{ tq } x_i = \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ i \ne j}} \lambda_j x_j$$

Exercice 13-10
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $x_1 = (1,0,2)$, $x_2 = (1,1,1)$ et $x_3 = (1,1,1)$. Le système (x_1, x_2, x_3) est-il libre ?

Exercice 13-11

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les deux fonctions définies par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$. Montrer que le système (f,g) est libre.
Les trois fonctions définies par $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2 x$ et $h(x) = \cos 2x$ forment-elles un système libre?

Exercice 13-12

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(kx) \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, le système $S = (f_1,\dots,f_n)$ est libre. On calculera d'abord pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)\,\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_{pq}$$

Exercice 13-13

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, le système $S = (f_1,\dots,f_n)$ est libre.

DÉFINITION 13.14 : **Systèmes générateurs**
On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1,\dots,x_n)$ est *générateur* d'un espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs du système :

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n \text{ tq } x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Remarque 135. Cela signifie que $\mathrm{Vect}(S) = E$.

Pour montrer qu'un système est générateur :
1. Soit $x \in E$;
2. posons $\lambda_1 = \dots, \lambda_n = \dots$;
3. on a bien $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Exercice 13-14

Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, montrer que les trois vecteurs $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (2,3)$ et $x_3 = (2,2)$ forment un système générateur.

DÉFINITION 13.15 : **Base**
On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1,\dots,x_n)$ est une *base* de l'espace vectoriel E si et seulement si :
1. le système S est libre ;
2. le système S est générateur.

Remarque 136. Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon *unique* comme combinaison linéaire de vecteurs de S.

Pour montrer qu'un système est une base :
1. Montrons que S est libre …
2. Montrons que S est générateur …

DÉFINITION 13.16 : **Base canonique de K^n**
Si $E = K^n$, il existe une base privilégiée, la base canonique $e = (e_1,\dots,e_n)$ où

$$e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots,\ e_n = (0,\dots,0,1)$$

Remarque 137. Ne pas parler de la « base canonique » d'un espace vectoriel quelconque …

Exercice 13-15

Montrer que dans l'espace $\mathbb{R}^3$, le système formé des vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ est une base.

13.6 Applications linéaires

Définition 13.17 : Application linéaire
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le *même* corps K et une application $u : E \mapsto F$. On dit que l'application u est *linéaire* si et seulement si :

1. $\forall (x,y) \in E^2$, $u(x+y) = u(x) + u(y)$;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

Proposition 13.16 : Caractérisation des applications linéaires
L'application u est linéaire si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in K^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)}$$

Remarque 138. Si l'application u est linéaire et si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une *base* de E, on connaît complètement l'application u si l'on connaît l'image par u des vecteurs de la base.

Exercice 13-16

Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 13-17

Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13-18

Soit l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \end{cases}$$

Montrer que ϕ est une application linéaire.

Théorème 13.17 : Image directe, réciproque d'un sev par une application linéaire
Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire, V un sev de E et W un sev de F. Alors :

1. $u^{-1}(W)$ est un sev de E ;
2. $u(V)$ est un sev de F.

Définition 13.18 : Image, noyau d'une application linéaire
Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire. On appelle :

1. *noyau* de u : $\operatorname{Ker} u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$ (sev de E) ;
2. *image* de u : $\operatorname{Im} u = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = u(x)\} = u(E)$ (sev de F).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \cup & & \cup \\ \operatorname{Ker} u & & \operatorname{Im} u \end{array}$$

Théorème 13.18 : Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$.

1. L'application u est *injective* si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$;
2. L'application u est *surjective* si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

Exercice 13-19

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{cases}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 13-20

Soit l'espace E des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. On considère l'application :

$$D : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{cases}$$

Montrer que l'application D est linéaire et déterminer son noyau.

Théorème 13.19 : Équation $u(x) = b$
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$. On considère un vecteur $b \in F$, et on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$. Alors

1. si $b \notin \operatorname{Im} u$, $\mathcal{S}_E = \emptyset$;
2. si $b \in \operatorname{Im} u$, il existe une solution particulière $x_0 \in \mathcal{S}_E$. L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\mathcal{S}_E = \{x_0 + k \ ; \ k \in \operatorname{Ker} u\}$$

On dit que c'est un sous-espace *affine* de l'espace vectoriel E.

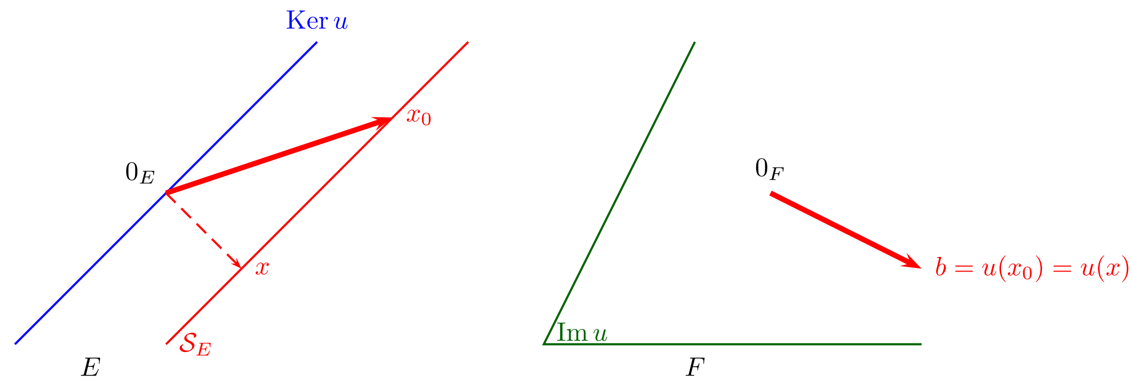


Fig. 13.4 – *Équation* $u(x) = b$

Théorème 13.20 : Composée d'applications linéaires
Soient E,F,G trois K-ev et $u : E \mapsto F$, $v : F \mapsto G$ deux applications linéaires. Alors $v \circ u : E \mapsto G$ est une application linéaire.

Exercice 13-21

Soient (u,v) les deux applications linéaires définies par :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (0,x) \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,0) \end{array} \right.$$

Déterminer $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 13-22

Soient $u,v : E \mapsto E$ deux applications linéaires vérifiant $u \circ v = 0$. Comparer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} u$.

Théorème 13.21 : Inverse d'une application linéaire bijective
Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire *bijective* et u^{-1} sa bijection réciproque. Alors $u^{-1} : F \mapsto E$ est une application linéaire.

Définition 13.19 : endomorphisme, Isomorphisme, automorphisme
Soient E, F deux K-ev. On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

1. Un *endomorphisme* de E est une application linéaire $u : E \mapsto E$. On note $L(E) = L(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ;
2. Un *isomorphisme* de E vers F est une application linéaire $u : E \mapsto F$ *bijective* ;
3. Un automorphisme de E est un endomorphisme de E *bijectif*. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 13.22 : $L(E,F)$ est un espace vectoriel
L'ensemble des applications linéaires d'un espace E vers un espace F, $\big(L(E,F), +, \cdot\big)$ est un K-ev.

13.7 Structure d'algèbre

DÉFINITION 13.20 : **Structure d'algèbre**
Soit un corps commutatif K et un ensemble E muni de deux lois de composition interne $+$, $\times$ et d'une loi de composition externe « $\cdot$ ». On dit que $(E,+,\times,\cdot)$ est une *algèbre* sur K si et seulement si :

1. $(E,+,.)$ est un K-ev ;
2. $(E,+,\times)$ est un anneau ;
3. $\forall\lambda\in K$, $\forall(x,y)\in E^2$, $(\lambda\cdot x)\times y = x\times(\lambda\cdot y) = \lambda\cdot(x\times y)$.

Remarque 139. Si E est une algèbre, alors $(E,+,\cdot)$ est un e.v. et $(E,+,\times)$ est un anneau.
En particulier, on dispose des règles de calcul dans ces deux structures (binôme, factorisation).

Exemples fondamentaux d'algèbres :

1. $(\mathbb{C},+,\times,\cdot)$ (où $\cdot$ désigne la multiplication d'un complexe par un réel) est une $\mathbb{R}$-algèbre ;
2. $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
3. $(\mathcal{S}(\mathbb{R}),+,\times,\cdot)$ (suites réelles) est une $\mathbb{R}$-algèbre ;
4. $\mathbb{K}^n$ est une algèbre si l'on définit la multiplication par

$$(x_1,\dots,x_n)\times(y_1,\dots,y_n) = (x_1y_1,\dots,x_ny_n)$$

DÉFINITION 13.21 : **Sous-algèbre**
Soit une K-algèbre $(E,+,\times,\cdot)$ et une partie $A\subset E$ de cette algèbre. On dit que A est une sous-algèbre de E lorsque :

1. $0_E\in A$, $1_E\in A$;
2. A est stable par CL: $\forall(x,y)\in A^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in K^2$, $\lambda x+\mu y\in A$;
3. A est stable pour la loi $\times$: $\forall(x,y)\in A^2$, $x\times y\in A$.

Alors munie des lois restreintes, A est une algèbre.

DÉFINITION 13.22 : **Morphismes d'algèbres**
Soit $f : E\mapsto E'$ une application entre deux algèbres. On dit que f est un morphisme d'algèbres si et seulement si :

1. f est une application linéaire : $\forall(x,y)\in E^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in K^2$, $f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$;
2. $\forall(x,y)\in E^2$, $f(x\times y) = f(x)\times f(y)$;
3. $f(1_E) = 1_F$.

Remarque 140. En d'autres termes, un morphisme d'algèbres est un morphisme d'anneau et une application linéaire.

Exercice 13-23
Montrer que $\mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une algèbre.

Exercice 13-24
Montrer que $f : \mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ défini par $f(z) = \overline{z}$ est un morphisme d'algèbres.

DÉFINITION 13.23 : **Application identité**
Soit E un K-ev on définit *l'identité* de E par :

$$\mathrm{id}_E : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$$

Soit $\alpha\in K$. On appelle *homothétie vectorielle* de rapport α l'application

$$h_\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_E : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \alpha\cdot x \end{array}\right.$$

C'est un endomorphisme de E.

THÉORÈME 13.23 : **Algèbre $L(E)$**
Soit E un K-ev. $(L(E),+,\circ,\cdot)$ est une K-algèbre.

Théorème 13.24 : Groupe linéaire
$(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe (non-commutatif) d'élément neutre id_E. C'est le *groupe linéaire*.

Remarque 141. En général, si $(u,v) \in \mathrm{GL}(E)^2$, on n'a pas $(u+v) \in \mathrm{GL}(E)$. Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}^\star$, $\lambda.u \in \mathrm{GL}(E)$ et $(\lambda.u)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}.u^{-1}$.

Remarque 142. Puisque l'algèbre $\big(L(E), +, \circ\big)$ est un anneau (non-commutatif), on a les formules de calcul suivantes : Si u et v sont deux endomorphismes tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$, on dispose des formules suivantes :

1. **Binôme :** $\boxed{(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}}$;
2. **Factorisation :** $\boxed{u^n - v^n = (u-v) \circ (u^{n-1} + u^{n-2} \circ v + \cdots + u \circ v^{n-2} + v^{n-1})}$;
3. **Cas particulier de factorisation :** $\boxed{\mathrm{id} - u^n = (\mathrm{id} - u) \circ (\mathrm{id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1})}$.

Exercice 13-25

Soit un K-ev E et deux endomorphismes $u,v \in L(E)$.

a) Développer $(u+v)^2$;

b) Développer $(\mathrm{id} - u) \circ (\mathrm{id} + u)$;

c) Si $u^2 = 0$, montrer que $(\mathrm{id} - u)$ est bijective.

Exercice 13-26

On considère les deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$ suivants :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array} \right. \quad \text{et } v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,y) \end{array} \right.$$

Calculer $u \circ v$, $v \circ u$, u^2 et v^2. Conclusion ? Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id} - u)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 13-27

Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$ vérifiant :

$$u^3 + u^2 + 2\,\mathrm{id}_E = 0$$

Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer son inverse u^{-1}. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une condition suffisante sur le scalaire λ pour que l'endomorphisme $u + \lambda\,\mathrm{id}$ soit inversible.

Exercice 13-28

Soit un K-ev E et un endomorphisme $k \in \mathrm{GL}(E)$. On considère l'application

$$\phi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longmapsto & k \circ u \end{array} \right.$$

Montrer que $\phi_k \in \mathrm{GL}\big(L(E)\big)$, puis que l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}\big(L(E)\big) \\ k & \longmapsto & \phi_k \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes injectif.

Exercice 13-29

Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Montrer que :

a) $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2 \iff E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u$

b) $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2 \iff \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$.

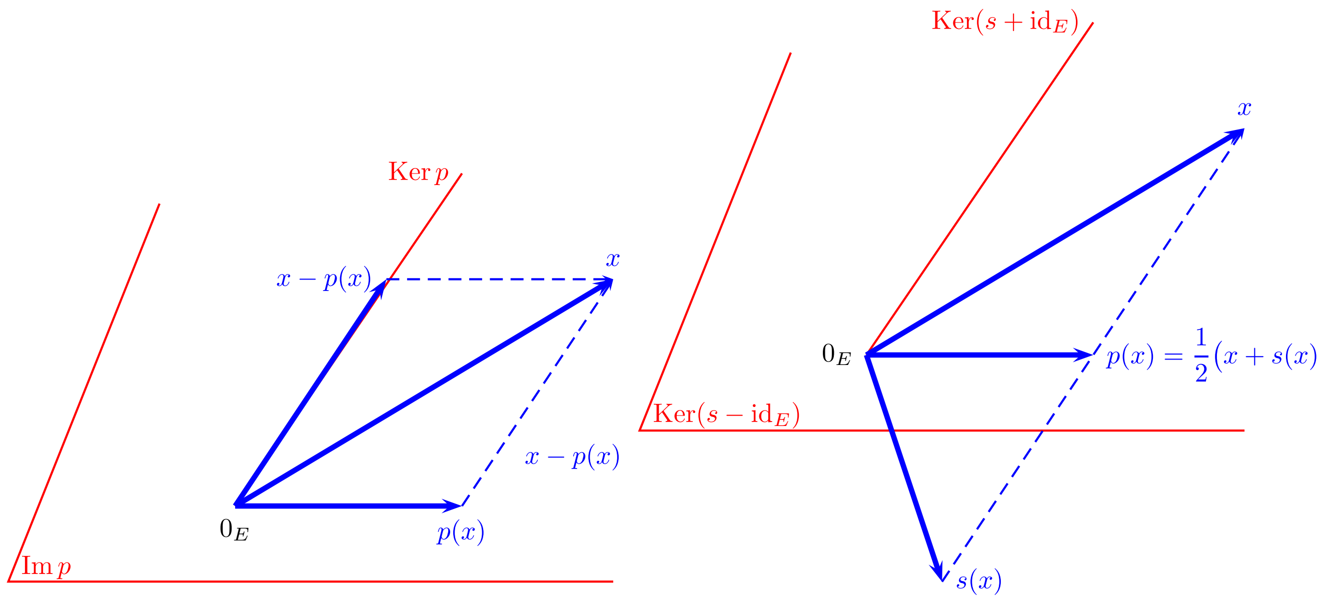
Exercice 13-30

Soit un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que le système $S = \big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ soit libre.

13.8 Projecteurs

Définition 13.24 : Projecteurs
Soit un endomorphisme $p \in L(E)$. On dit que p est un *projecteur* si et seulement si il vérifie l'identité
$$p \circ p = p$$

Théorème 13.25 : Décomposition associée à un projecteur
Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E. Alors
1. on a la caractérisation suivante de $\operatorname{Im} p$:
$$\operatorname{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$$
2. $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et la décomposition d'un vecteur $x \in E$ s'écrit
$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big[x - p(x)\big]}_{\in \operatorname{Ker} p}$$



(a) Décomposition associée à un projecteur

(b) Décomposition associée à une symétrie

Fig. 13.5 – *Projecteur, symétrie*

Théorème 13.26 : Projecteur associé à deux sev supplémentaires
Soient F et G deux sev de E supplémentaires : $E = F \oplus G$. Alors il existe un unique projecteur p vérifiant :
$$F = \operatorname{Im} p \quad G = \operatorname{Ker} p$$
On dit que p est le projecteur sur le sous-espace F parallèlement au sous-espace G.

Exercice 13-31

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $E_1 = \operatorname{Vect}(1,1,1)$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Déterminer l'expression analytique du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

Exercice 13-32

Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E. Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id} - p)$ est aussi un projecteur de E et que l'on a $\operatorname{Ker}(\mathrm{id} - p) = \operatorname{Im} p$, $\operatorname{Im}(\mathrm{id} - p) = \operatorname{Ker} p$.

Exercice 13-33

Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'endomorphisme $u = p + \lambda \operatorname{id}_E$. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^n à l'aide de p et de id_E.

Exercice 13-34

Soient deux projecteurs p et q d'un espace vectoriel E. Montrer que l'endomorphisme $(p+q)$ est un projecteur de E si et seulement si l'on a $p \circ q = q \circ p = 0$. Si c'est le cas, montrer qu'alors $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

DÉFINITION 13.25 : **Symétries**
Soit un endomorphisme $s \in L(E)$ de E. On dit que cet endomorphisme est une *symétrie vectorielle* si et seulement s'il vérifie :

$$s \circ s = \operatorname{id}_E$$

THÉORÈME 13.27 : **Décomposition associée à une symétrie**
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit une symétrie vectorielle s . Alors

1. $E = E_1 \oplus E_2$ où $E_1 = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id})$ (vecteurs invariants) et $E_2 = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id})$ (vecteurs transformés en leur opposé) ;
2. si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2, on a $\operatorname{id} + s = 2p$.

Exercice 13-35

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au sous-espace E_1 parallèlement au sous-espace E_2 où :

$$E_1 = \operatorname{Vect}\big((1,0,0),(1,1,1)\big) \text{ et } E_2 = \operatorname{Vect}(1,2,0)$$

Exercice 13-36

Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soient deux réels distincts $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(u - a\operatorname{id}) \circ (u - b\operatorname{id}) = 0$$

a) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - a\operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - b\operatorname{id})$.

b) Déterminer la restriction de u à $\operatorname{Ker}(u - a\operatorname{id})$ et à $\operatorname{Ker}(u - b\operatorname{id})$.

Exercice 13-37

On considère un projecteur p d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Soit un vecteur $b \in E$. Montrer que l'équation vectorielle

$$(E) \quad p(x) + \lambda x = b$$

possède une unique solution $x \in E$.

13.9 Formes linéaires

DÉFINITION 13.26 : **Formes linéaires, dual**
Soit un K-ev E. On appelle *forme linéaire* sur E, une application linéaire $\phi : E \mapsto K$. On note $E^\star = L(E,K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E. $E^\star$ s'appelle l'espace *dual* de l'espace E.

DÉFINITION 13.27 : **Hyperplan**
On appelle *hyperplan* de E, le noyau d'une forme linéaire non-nulle :

$$H = \operatorname{Ker} \phi$$

Exercice 13-38

Déterminer toutes les formes linéaires de l'espace $\mathbb{R}^3$. Quels-sont les hyperplans de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 13-39

Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'application

$$\delta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{cases}$$

Vérifier que δ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \operatorname{Ker} \delta$.

Théorème 13.28 : Caractérisation des hyperplans
Soit H un sev d'un K-ev E tel que $H \neq E$. Alors H est un hyperplan si et seulement s'il existe un vecteur $a \in E$ tel que H admette la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(a)$ comme supplémentaire :

$$\big(H \text{ est un hyperplan }\big) \Longleftrightarrow \big(\forall a \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)\big)$$

Exercice 13-40

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z = t\}$. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 13-41

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de H dans E.

Théorème 13.29 : Deux formes linéaires sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau
Soient ϕ et ψ deux formes linéaires non-nulles sur E. Alors le système (ϕ,ψ) est lié dans $E^\star$ si et seulement si $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Ker} \psi$.