Chapitre 5

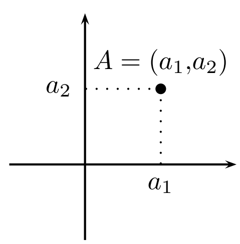
Géométrie du plan

Ce chapitre est une introduction à la géométrie et a pour but de vous familiariser avec des notions et techniques utilisées en physique et en si. Des définitions plus rigoureuses seront vues en cours d'année.

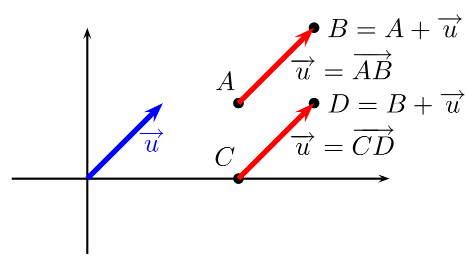
5.1 Points, vecteurs

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ formé des couples de réels. On peut représenter un tel couple (x,y), par un point M du plan. Un vecteur $\overrightarrow{u}$ modélise un *déplacement* entre deux points A et B. Si $A = (a_1,a_2)$ et $B = (b_1,b_2)$, on définit le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ comme étant le couple de réels $\overrightarrow{u} = (b_1 - a_1,b_2 - a_2)$.

On notera $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $B = A + \overrightarrow{u}$ et $A = B - \overrightarrow{u}$, notations compatibles avec l'addition des couples. On représente graphiquement un vecteur par une flèche joignant le premier point au deuxième. Sur le schéma 5.1, les déplacements entre les points A,B et les points C,D sont identiques. Un vecteur du plan peut être défini comme une classe d'équivalence sur les couples de points. On privilégie sur le dessin le déplacement partant de l'origine qui permet d'interpréter au mieux les opérations sur les vecteurs. Si les points A et B ont pour affixes les complexes a et b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond au complexe $b - a$.



(a) Point



(b) Vecteurs

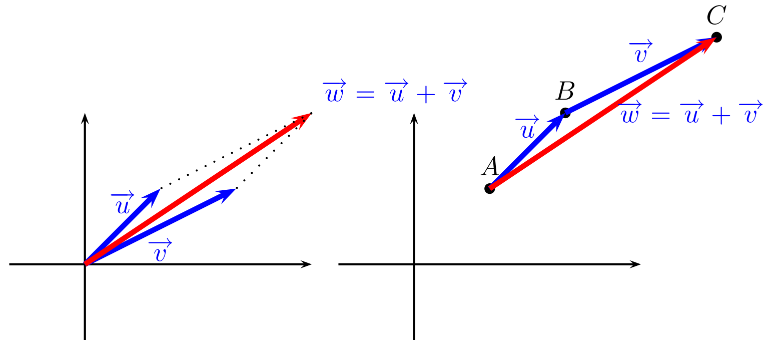
FIG. 5.1 – *Points-vecteurs*

On définit *l'addition de deux vecteurs* par la formule : $\overrightarrow{u} = (u_1,u_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2)$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1,u_2 + v_2)$. L'addition de deux vecteurs correspond à la composée des deux déplacements et s'interprète graphiquement par la règle du parallélogramme.

On peut également multiplier un scalaire par un vecteur : si $\overrightarrow{u} = (u_1,u_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u} = (\lambda u_1,\lambda u_2)$. On parle également de *combinaison linéaire* de deux vecteurs. Pour deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{v}$, on définit le nouveau vecteur $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$.

DÉFINITION 5.1 : **Vecteurs colinéaires, systèmes liés, bases**

1. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, sont *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$ (ou si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul).
2. On dit qu'un système de deux vecteurs $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est *lié* si ces deux vecteurs sont colinéaires. Sinon, on dit que le système est *libre*.
3. Si un système de deux vecteurs $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est libre, tout vecteur du plan peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs. On dit que le système est une *base* du plan.



(a) Addition de deux vecteurs (b) Interprétation en déplacements

FIG. 5.2 – *Addition de vecteurs*

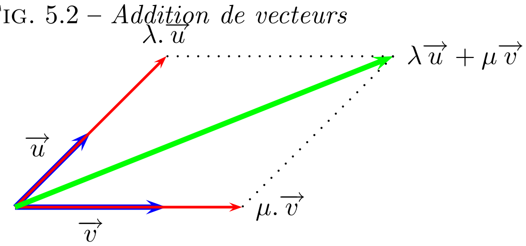


FIG. 5.3 – *Combinaison linéaire de deux vecteurs*

Parmi les bases possibles, on distingue une base particulière, la *base canonique* formée des vecteurs $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

DÉFINITION 5.2 : **Composantes d'un vecteur dans une base**
Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base du plan, tout vecteur $\overrightarrow{w}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$

Le couple de scalaires (λ,μ) s'appelle les *composantes* du vecteur $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.

DÉFINITION 5.3 : **Repère cartésien**
On appelle *repère cartésien* du plan la donnée d'un point Ω et d'une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$

On dit que les scalaires (λ,μ) sont les *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R} = (\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et on écrit $M\left|\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$.

DÉFINITION 5.4 : **Droite vectorielle, droite affine**

1. La *droite vectorielle* engendrée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ non-nul est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$:
$$\operatorname{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}\}$$
2. La *droite affine* $\mathcal{D}$ passant par un point A et dirigée par un vecteur non-nul $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $\mathcal{D} = \{A + \lambda.\overrightarrow{u}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. On dit que la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$ est la *direction* de la droite affine $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D} = A + \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$.

5.2 Modes de repérage dans le plan

On suppose le plan « orienté » dans le sens trigonométrique, et on suppose connue la notion intuitive d'angle orienté entre vecteurs non-nuls. Si $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ sont deux vecteurs d'affixes les complexes $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$,

l'angle orientié entre les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ vaut $\theta_2 - \theta_1$.
On dit qu'un vecteur est *normé* ou *unitaire* lorsque sa norme vaut 1. Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est *orthonormale* lorsque les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et unitaires. On dit de plus que la base est *directe* lorsque l'angle entre le premier et le deuxième vecteur de la base vaut $+\pi/2$. La base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthonormale directe. On dit qu'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est *orthonormé direct* si la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est une base orthonormale directe.

Théorème 5.1 : **Formules de changement de repère**
On considère deux repères orthonormés directs $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. On note θ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{I}$. Si M est un point du plan,

$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}, \quad M\left|\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}'}, \quad \Omega\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$$

on a les formules de changement de repère :

$$\boxed{\begin{cases} x &= \alpha + \cos\theta X - \sin\theta Y \\ y &= \beta + \sin\theta X + \cos\theta Y \end{cases}}$$

Remarque 38. Les formules de changement de repères quelconques sont de la forme :

$$\begin{cases} x &= \alpha + aX + cY \\ y &= \beta + bX + dY \end{cases}$$

Définition 5.5 : **Repère polaire**
Soit un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. L'origine du repère est appelée le *pôle*. Soit un réel $\theta \in \mathbb{R}$. On définit les deux vecteurs

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}(\theta) &= \cos\theta\, \overrightarrow{i} + \sin\theta\, \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v}(\theta) &= -\sin\theta\, \overrightarrow{i} + \cos\theta\, \overrightarrow{j} \end{cases}$$

Le système $(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est une base orthonormale directe, et le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ s'appelle le *repère polaire* d'angle θ.

Remarque 39. Le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta)$ a pour affixe $e^{i\theta}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}(\theta)$ a pour affixe $e^{i(\theta+\pi/2)} = ie^{i\theta}$.

Définition 5.6 : **Coordonnées polaires**
On considère un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit un point M différent du pôle. On dit qu'un couple de réels (ρ,θ) est un couple de coordonnées polaires du point M si

$$\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{u}(\theta)$$

Remarque 40.
1. Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires d'un point. Si (ρ,θ) est un couple de coordonnées polaires d'un point M, les couples suivants sont également des coordonnées polaires de M :
   - $(\rho, \theta + 2k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$
   - $(-\rho, \theta + (2k+1)\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$
2. Si $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$, et si (ρ,θ) est un couple de coordonnées polaires du point M,
   - On exprime les coordonnées cartésiennes de M en fonction d'un couple de coordonnées polaires par les formules :
   $$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{cases}$$
   - On peut trouver un couple de coordonnées polaires du point M en fonction des coordonnées cartésiennes par les formules :
   $$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta &= \dfrac{y}{x} \end{cases}$$
   (si $x = 0$, prendre $\theta = +\pi/2$ lorsque $y > 0$ ou $\theta = -\pi/2$ si $y < 0$).

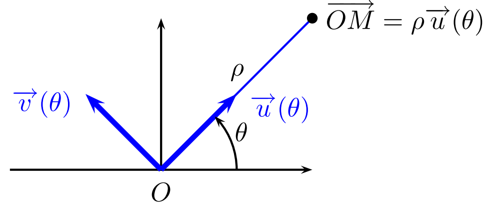


FIG. 5.4 – *Repère polaire :* $\mathcal{R}_\theta = (O,u(\theta),v(\theta))$

Exercice 5-1

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère deux droites affines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes. Soient A_1,B_1,C_1 trois points distincts de la droite $\mathcal{D}_1$ et A_2,B_2,C_2 trois points distincts de la droite $\mathcal{D}_2$.

Montrer que si les droites (A_1B_2) et (A_2B_1) sont parallèles et que les droites (B_1C_2) et (B_2C_1) sont parallèles, alors les droites (A_1C_2) et (A_2C_1) sont également parallèles.

Exercice 5-2

Dans le plan, montrer que les médianes d'un triangle (ABC) se coupent à l'isobarycentre de (A,B,C).

5.3 Produit scalaire, produit mixte

DÉFINITION 5.7 : **Produit scalaire, norme, distance**

1. Si un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe un complexe z, on définit la *norme* de $\overrightarrow{u}$ comme le module de z :
$$\|u\| = |z|$$
Ce réel représente la « longueur » du vecteur z.
2. Pour deux points A et B, d'affixes $a,b \in \mathbb{C}$, on définit la *distance* entre les points par :
$$d(A,B) = |b-a| = \|\overrightarrow{AB}\|$$
3. On définit le *produit scalaire* entre deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls par
$$(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta$$
où $\theta = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

PROPOSITION 5.2 : **Interprétation en nombres complexes**
Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ d'affixes les complexes $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :
$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)$$

PROPOSITION 5.3 : **Propriétés du produit scalaire**
Pour trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a les propriétés suivantes :

1. **bilinéarité :**
$$(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$$
$$\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$
2. **symétrie :** $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.

THÉORÈME 5.4 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan, on a l'inégalité :
$$\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right| \le \|\overrightarrow{u}\|\;\|\overrightarrow{v}\|$$
avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

Proposition 5.5 : Expression du produit scalaire dans une bon

Si $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est une base orthonormale du plan, le produit scalaire de deux vecteurs s'exprime simplement à l'aide des coordonnées des vecteurs dans cette base : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy'$$

Proposition 5.6 : Interprétation du produit scalaire en termes de projections

Soit une droite affine $\mathcal{D}$ dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et deux points A, B du plan. En notant A' et B' les projetés orthogonaux des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$, on a

$$d(A',B') = \left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB}\right|$$

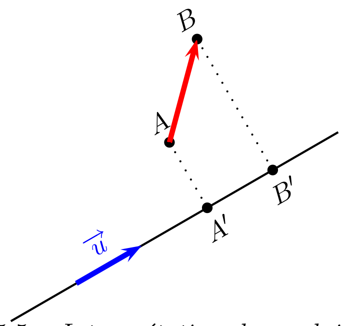


Fig. 5.5 – *Interprétation du produit scalaire*

Définition 5.8 : Produit mixte

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ non-nuls. On appelle *déterminant* ou *produit mixte* des deux vecteurs le réel

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|\sin\theta$$

où $\theta = (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est l'angle orienté entre les deux vecteurs.
Si l'un des vecteurs est nul, $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = 0$.

Proposition 5.7 : Interprétation complexe

Si les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ont pour affixe les complexes z_1 et z_2,

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2)$$

Proposition 5.8 : Propriétés du produit mixte

1. **bilinéarité :** pour trois vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$, et deux scalaires $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$,
   - $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\lambda\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_3}) = \lambda\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) + \mu\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_3})$
   - $\operatorname{Det}(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}) = \lambda\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_3}) + \mu\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$
2. **antisymétrie :** $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_1}) = -\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$.
3. **vecteurs liés :** les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont liés si et seulement si $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = 0$.
4. **Inégalité de Gramm-Schmidt :**
$$|\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})| \leq \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|$$
   avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux.
5. **Identité de Lagrange :**
$$(\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2 + \operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})^2 = \|\overrightarrow{u_1}\|^2\|\overrightarrow{u_2}\|^2$$

Proposition 5.9 : Interprétation en termes d'aire

Le produit mixte de deux vecteurs $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ représente l'aire algébrique du parallélogramme s'appuyant sur les deux vecteurs.

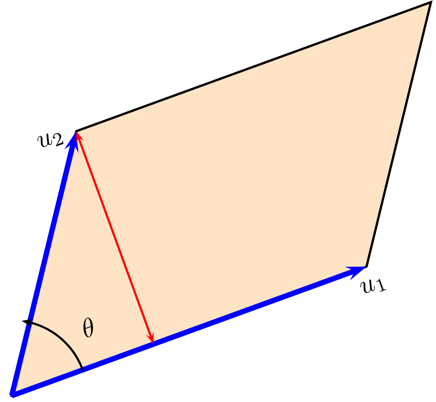


Fig. 5.6 – *Interprétation du produit mixte*

Théorème 5.10 : **Calcul du produit mixte dans une bon directe**
Dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, si $\overrightarrow{u_1} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u_2} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}$,

$$\boxed{\text{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1}$$

5.4 Droites

Théorème 5.11 : **Condition d'alignement de trois points**
Dans un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, trois points $M_1\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$, $M_2\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$, $M_3\begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$ sont alignés si et seulement si $\text{Det}(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}) = 0$, ce qui se traduit par :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

THÉORÈME 5.12 : **Droite passant par un point dirigée par un vecteur non-nul**
On considère une droite affine passant par un point $\Omega\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}u_1\\ u_2\end{vmatrix}$ non-nul.

Un point $M\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}$ est sur cette droite si et seulement si :

1. **Équation paramétrique :** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\boxed{\begin{cases} x &= \alpha + \lambda u_1 \\ y &= \beta + \lambda u_2 \end{cases}}$$
2. **Équation cartésienne :** les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont liés, ce qui se traduit par
$$\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\Omega M}) = 0 \ : \begin{vmatrix} x-\alpha & u_1 \\ y-\beta & u_2 \end{vmatrix} = 0$$
3. L'équation cartésienne d'une droite affine est de la forme :
$$ax + by + c = 0$$
avec $(a,b) \neq (0,0)$, L'équation cartésienne de la droite vectorielle associée est :
$$ax + by = 0$$
(on supprime la constante) et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}-b\\ a\end{vmatrix}$ dirige cette droite vectorielle.

THÉORÈME 5.13 : **Droite passant par deux points distincts**
Soient deux points $M_1\begin{vmatrix}x_1\\ y_1\end{vmatrix}$ et $M_2\begin{vmatrix}x_2\\ y_2\end{vmatrix}$ distincts. Un point $M\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}$ appartient à la droite (M_1M_2) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont liés, ce qui se traduit par :

1. **Équation paramétrique :** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$$
2. **Équation cartésienne :**
$$\text{Det}(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

THÉORÈME 5.14 : **Droite définie par un point et un vecteur normal**
Soit un point $\Omega\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{v}\begin{vmatrix}v_1\\ v_2\end{vmatrix}$. Un point $M\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}$ appartient à la droite passant par Ω et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{v} = 0$ ce qui donne l'équation cartésienne de cette droite :
$$v_1(x-\alpha) + v_2(y-\beta) = 0$$

Remarque 41. Réciproquement, si l'équation cartésienne d'une droite affine est
$$\mathcal{D} \ : ux + vy + w = 0$$
le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix}u\\ v\end{vmatrix}$ est normal à la droite.

Théorème 5.15 : Distance d'un point à une droite

1. Soit une droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ un point du plan. Alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les deux points A, B distincts et M un point du plan. Alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})\right|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$$

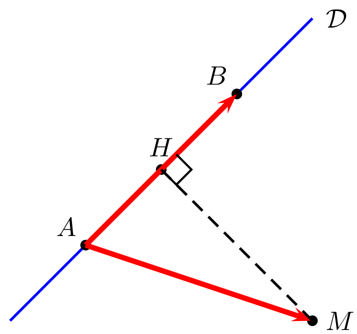


Fig. 5.7 – *Distance d'un point à une droite dans le plan*

Théorème 5.16 : Équation normale d'une droite

Soit $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{matrix}\right.$ un vecteur unitaire. On définit l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ M & \mapsto & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OM}\end{array}\right.$. Les lignes de niveau de f sont des droites affines :

$$f(M) = c \Longleftrightarrow \boxed{\cos\theta x + \sin\theta y = c}$$

avec $\overrightarrow{u}$ un vecteur normal à la droite, et $|c| = d(O,\mathcal{D})$.

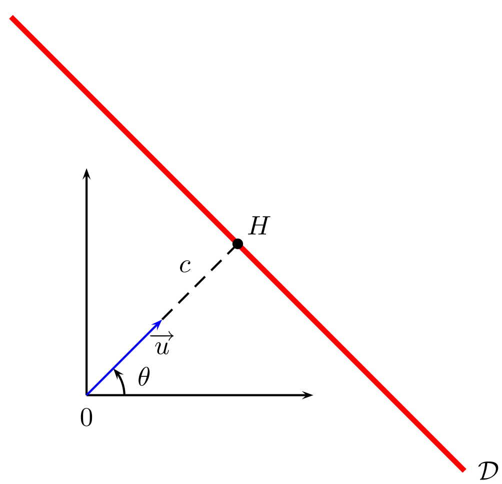


Fig. 5.8 – *Équation normale d'une droite*

THÉORÈME 5.17 : **Équation polaire d'une droite**

1. **Droite passant par l'origine :** $\theta = \theta_0$
2. **Droite parallèle à** (Ox) **:** $\rho = \dfrac{a}{\sin\theta}$
3. **Droite parallèle à** (Oy) **:** $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$
4. **Droite quelconque :**

$$\rho = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta-\theta_0)}$$

où p est la distance du pôle à la droite et θ_0 l'angle entre (Ox) et la normale à la droite.

Exercice 5-3

Soit un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et un point A. Déterminer les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto \text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})$

5.5 Cercles

DÉFINITION 5.9 : **Cercle**

On considère un point Ω et un réel strictement postif $R > 0$. On appelle *cercle* de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points du plan à distance R du centre :

$$\mathcal{C}(\Omega,R) = \{M \in \mathcal{P} \mid d(\Omega,M) = R\}$$

THÉORÈME 5.18 : **Équation cartésienne réduite d'un cercle**

Si $\Omega\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$, un point $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ appartient au cercle de centre Ω et de rayon R si et seulement si :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un point $M\left|\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right._{\mathcal{R}'}$ appartient au cercle si et seulement si

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

PROPOSITION 5.19 : **Équation cartésienne de la tangente à un cercle**

– On considère un cercle d'équation réduite

$$x^2 + y^2 = R^2$$

et un point $M_0\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right._{\mathcal{R}'}$ du cercle. L'équation cartésienne de la tangente au cercle au point M_0 est :

$$\boxed{xx_0 + yy_0 = R^2}$$

– On considère un cercle d'équation générale

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

et un point $M_0\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ du cercle. L'équation de la tangente au cercle au point M_0 est :

$$\boxed{xx_0 + yy_0 + a\frac{x+x_0}{2} + b\frac{y+y_0}{2} + c = 0}$$

(règle de dédoublement des termes)

Théorème 5.20 : Équation générale d'un cercle
L'ensemble des points du plan $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est de la forme suivante :
- vide (si $a^2 + b^2 - 4c < 0$)
- Réduite à un point (si $a^2 + b^2 - 4c = 0$)
- Un cercle (si $R^2 = a^2 + b^2 - 4c > 0$)

Théorème 5.21 : Équation polaire d'un cercle passant par l'origine

- Cercle de centre 0 et de rayon a :
$$\rho = a$$
- Cercle tangent à (Oy) et passant par l'origine :
$$\rho = 2R\cos\theta$$
- Cercle quelconque passant par l'origine :
$$\rho = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta$$

Théorème 5.22 : Intersection d'un cercle et d'une droite
L'intersection d'un cercle et d'une droite peut être :
- vide,
- réduite à un point. Dans ce cas la droite est tangente au cercle
- formée de deux points distincts.

Théorème 5.23 : Intersection de deux cercles
L'intersection de deux cercles de rayons R et r $(R > r)$ est non-vide si et seulement si

$$R - r \leq d \leq R + r$$

où d est la distance entre les deux centres.

Exercice 5-4

On considère deux points A et B distincts. Déterminer les points M vérifiant la condition

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

Exercice 5-5

On définit l'angle non-orienté entre deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ comme étant l'angle modulo π que font deux vecteurs directeurs de ces droites.
Soient deux points distincts du plan A et B et un réel $\alpha \in [0,\pi[$. Déterminer les lignes de niveau de la fonction

$$M \mapsto (MA,MB)$$

Exercice 5-6

Soient deux points distincts A et B et un réel $k > 0$. Déterminer les points M vérifiant :

$$d(M,B) = k \times d(M,A)$$
