Chapitre 6

Géométrie de l'espace

6.1 Modes de repérage dans l'espace

Définition 6.1 : **systèmes liés**
On dit que trois vecteurs $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ de l'espace forment un système *lié* si l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres. Si un système n'est pas lié, on dit qu'il est *libre*. Alors tout vecteur de l'espace s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. On dit que le système est une *base* de l'espace.

Définition 6.2 : **Repère cartésien**
Un repère cartésien de l'espace est la donnée d'un point (l'origine du repère) et de trois vecteurs formant une base de l'espace. On note $\mathcal{R} = (\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ un tel repère. Si M est un point du plan, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ se décompose de façon unique sur les vecteurs de la base :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$$

On note $M\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ et on dit que les scalaires x,y,z sont les *coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

Théorème 6.1 : **Formules de changement de repère**
Soient deux repères cartésiens $\mathcal{R} = (\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega',\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2},\overrightarrow{e'_3})$ et un point M. On note :

$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{\mathcal{R}},\ M\left|\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right._{\mathcal{R}'},\ \Omega'\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$$

Alors les coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$ s'expriment en fonction des coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ sous la forme :

$$\begin{cases} x &= \alpha + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= \beta + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= \gamma + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases}$$

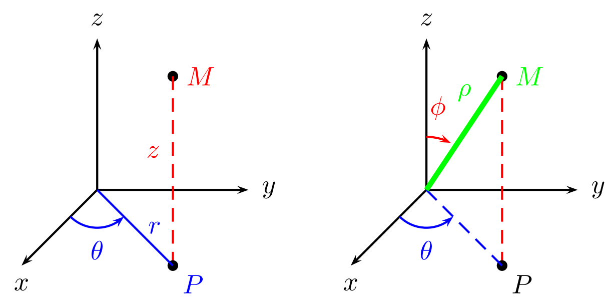
Remarque 42. Orientation de l'espace, angle entre vecteurs, angle entre droites.

Définition 6.3 : **Coordonnées cylindriques**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Définition 6.4 : Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$



(a) Coordonnées cylindriques

(b) Coordonnées sphériques

Fig. 6.1 – *Coordonnées cylindriques et sphériques*

6.2 Produit scalaire

Définition 6.5 : Produit scalaire
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2)$ et on définit le produit scalaire de ces deux vecteurs par :

$$(\overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

et on définit la *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ par

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Proposition 6.2 : Propriétés du produit scalaire

1. **bilinéarité :** soient trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ et deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:
   (a) $(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{u_3} = \lambda\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} + \mu\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3}$
   (b) $\overrightarrow{u_1}.(\lambda\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_3}) = \lambda\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3}$
2. **symétrie :** Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1}$.

Remarque 43.
- On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.
- On dit qu'un vecteur est unitaire lorsque sa norme vaut 1.
- On dit qu'une base est *orthonormale* lorsque les trois vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux et unitaires.
- On dit qu'un repère est *orthonormé* lorsque sa base est orthonormale.

Proposition 6.3 : Coordonnées d'un vecteur dans une bon
Dans une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$, un vecteur $\overrightarrow{x}$ se décompose sous la forme :

$$\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_1})e_1 + (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_2})e_2 + (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_3})e_3$$

Proposition 6.4 : Calcul du produit scalaire dans une bon
Si $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormale quelconque et si

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} & = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{u'} & = x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy' + zz'$.

Définition 6.6 : Distance entre deux points
On définit la distance entre deux points A et B de l'espace par :

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Si $\mathcal{R}$ est un repère orthonormé et si $A\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, B\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix},$

$$d(A,B) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

6.3 Produit vectoriel

Lemme 6.5 : Colinéarité de deux vecteurs
Deux vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2)$ sont colinéares si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Définition 6.7 : Produit vectoriel
On appelle *produit vectoriel* de deux vecteurs

$$\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1),\ \overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2)$$

le vecteur

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix})$$

Proposition 6.6 : Propriétés du produit vectoriel

1. le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.
2. le produit vectoriel est bilinéaire :
   - $\overrightarrow{u_1} \wedge (\lambda\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_3}) = \lambda\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_3}$
   - $(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{u_3} = \lambda\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_3} + \mu\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3}$
3. le produit vectoriel est antisymétrique : $\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$,
4. le produit vectoriel est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs : $\overrightarrow{u_1}.(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_2}.(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{0}$.
5. On a la formule du double produit vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} \wedge (\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3}) = (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3})\overrightarrow{u_2} - (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})\overrightarrow{u_3}}$$

6. Identité de Lagrange :
$$\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|^2 + (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2 = \|\overrightarrow{u_1}\|^2\|\overrightarrow{u_2}\|^2$$

Remarque 44.
1. D'après la formule de Lagrange, si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont deux vecteurs non-nuls, il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|\cos\theta \\ \|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\| & = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|\sin\theta \end{cases}$$

   On appelle θ l'angle non-orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
2. $\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
3. Soit une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$. Comme $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$ et à $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \pm\overrightarrow{e_3}$. On dit que la base orthonormale est *directe* lorsque $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$ et *indirecte* sinon. On dispose de la « règle du tire-bouchon » pour se représenter une base directe de l'espace.

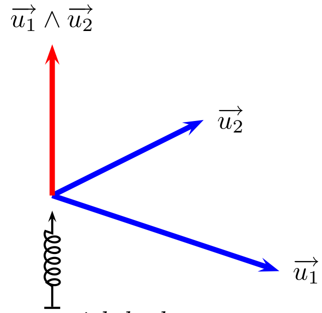


FIG. 6.2 – *Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace*

PROPOSITION 6.7 : Calcul du produit vectoriel dans une bon directe
Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormale directe, et si $\overrightarrow{u_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} + z_1\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + z_2\overrightarrow{e_3}$, alors

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} \left| \begin{array}{l} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{array} \right._{\mathcal{B}}$$

6.4 Déterminant, produit mixte

DÉFINITION 6.8 : Produit mixte
On appelle *produit mixte* (ou *déterminant*) de trois vecteurs, le réel :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$$

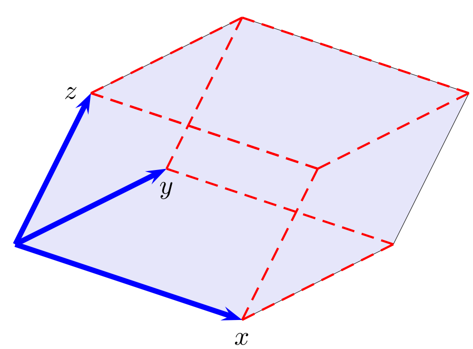


FIG. 6.3 – *Interprétation du produit mixte*

PROPOSITION 6.8 : Propriétés du produit mixte

1. **trilinéarité :** le produit mixte est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.
2. Si deux des trois vecteurs sont égaux, le produit mixte est nul.
3. **antisymétrie :** en permutant deux vecteurs, on change le produit mixte en son opposé.
4. **condition de coplanarité :** trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.
5. **interprétation géométrique :** le produit mixte de trois vecteurs représente le volume algébrique du parallélogramme construit sur les trois vecteurs.

Proposition 6.9 : Calcul du produit mixte dans une bon directe

Si $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormale directe, pour trois vecteurs

$$\overrightarrow{u_1}\left|\begin{array}{l}x_1\\y_1\\z_1\end{array}\right., \overrightarrow{u_2}\left|\begin{array}{l}x_2\\y_2\\z_2\end{array}\right., \overrightarrow{u_3}\left|\begin{array}{l}x_3\\y_3\\z_3\end{array}\right.$$

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}) = \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3$$

On utilise la *règle de Sarrus* pour se souvenir de cette formule :

$$\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}\\
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}
\end{array}$$

6.5 Droites et plans

Proposition 6.10 : Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par le point $M_0\left|\begin{array}{l}x_0\\y_0\\z_0\end{array}\right.$ et dirigée par le vecteur non-nul $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}\alpha\\\beta\\\gamma\end{array}\right.$. Un point $M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right.$ appartient à cette droite si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_0 + \lambda\alpha\\ y &= y_0 + \lambda\beta\\ z &= z_0 + \lambda\gamma\end{cases}}$$

Proposition 6.11 : Rerpésentation paramétrique d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $M_0\left|\begin{array}{l}x_0\\y_0\\z_0\end{array}\right.$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}\left|\begin{array}{l}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{array}\right.$, $\overrightarrow{u_2}\left|\begin{array}{l}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{array}\right.$ non-colinéaires. Un point $M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right.$ appartient à ce plan si et seulement s'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2\\ y &= y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2\\ z &= z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2\end{cases}}$$

Proposition 6.12 : Équation carésienne d'un plan
Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et dirigé par les deux vecteurs non-colinéaires $\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}$. Un point $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient à ce plan si et seulement si :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$$

ce qui donne une équation cartésienne de la forme :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

Le plan vectoriel dirigeant $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$\boxed{ax + by + cz = 0}$$

(supprimer la constante dans les équations affines). Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 6.13 : Plan passant par trois points
Soient trois points $A_1\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$, $A_2\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$ et $A_3\begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}$ non-alignés. Un point $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient au plan passant par ces trois points si et seulement si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}) = 0$ ce qui donne l'équation cartésienne de ce plan :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Proposition 6.14 : Plan passant par un point et normal à un vecteur
Soit un point $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$. L'équation cartésienne du plan passant par A et normal à $\overrightarrow{n}$ est :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Proposition 6.15 : Deux plans perpendiculaires
Soient deux plans affines donnés par leur équation cartésienne :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz = h$$

$$\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z = h'$$

Ces deux plans sont perpendiculaires si et seulement si :

$$\boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$$

Proposition 6.16 : Équations cartésiennes d'une droite
Une droite affine peut être vue comme intersection de deux plans non-parallèles :

$$\boxed{\begin{cases} ax+by+cz+d & =0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & =0 \end{cases}}$$

où un vecteur directeur de la droite est :

$$\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix} \neq \overrightarrow{0}$$

Remarque 45.
1. Il n'y a pas unicité des deux plans qui définissent une droite.
2. Une façon rapide d'obtenir une équation de droite consiste à éliminer le paramètre d'une équation paramétrique.
3. Les plans contenant la droite $\mathcal{D}$ ont pour équation cartésienne :

$$\mathcal{P}_\lambda(ax+by+cz+d)+\lambda(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

(sauf le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$). On appelle cette famille de plans le *faisceau de plans* issu de la droite $\mathcal{D}$.

Théorème 6.17 : Distance d'un point à un plan donné par son équation cartésienne
Soit un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{P} \ : ax+by+cz+d=0$$

et un point $M_0\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$. La distance du point M_0 au plan $\mathcal{P}$ est donnée par la formule :

$$\boxed{d(M_0,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Théorème 6.18 : Distance d'un point à un plan passant par trois points
Soit le plan affine $\mathcal{P}$ passant par trois points non-alignés A, B et C et un point M. La distance entre le point M et le plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}}$$

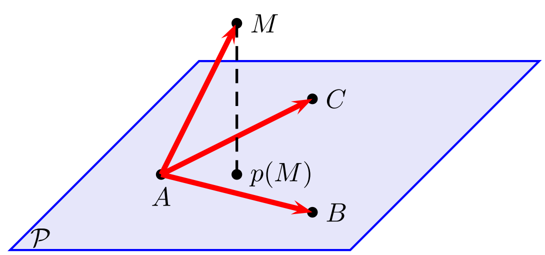


Fig. 6.4 – *Distance d'un point à un plan*

Théorème 6.19 : Distance d'un point à une droite
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ non-nul et un point M de l'espace. La distance du point M à la droite est donnée par la formule :

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}}$$

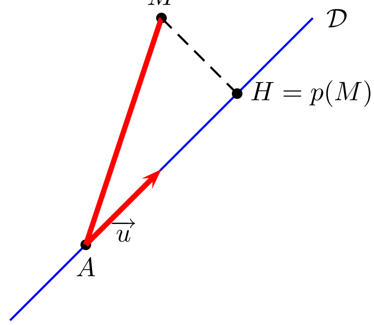


FIG. 6.5 – *Distance d'un point à une droite de l'espace*

PROPOSITION 6.20 : Équation normale d'un plan

Soit un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$. Définissons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OM} \end{cases}$. Alors les lignes de niveau de la fonction f sont des plans affines :

$$f(M) = h \iff \boxed{ax + by + cz = h},\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur orthogonal à ce plan et $|h| = d(0,\mathcal{P})$.

6.6 Sphères

DÉFINITION 6.9 : Sphère

On appelle *sphère* de centre A et de rayon $R > 0$, l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $d(A,M) = R$.

PROPOSITION 6.21 : Équation d'une sphère

1. Dans un repère orthonormé d'origine A, la sphère a pour équation réduite $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$.
2. Dans un repère orthonormé quelconque, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$ est soit :
   - vide,
   - réduit à un point,
   - une sphère.

Remarque 46. On peut utiliser les coordonnées sphériques pour paramétrer une sphère de centre l'origine du repère :

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta\sin\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \qquad \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [-\pi,\pi] \\ z &= R\cos\phi \end{cases}$$

PROPOSITION 6.22 : Intersection d'un plan et d'une sphère

Soit une sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon R et un plan affine $\mathcal{P}$.

1. Si $d(A,\mathcal{P}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$,
2. Si $d(A,\mathcal{P}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{M_0\}$, (on dit que le plan est *tangent* à la sphère),
3. Si $d(A,\mathcal{P}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(A,\mathcal{P})}$ et de centre H, le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Proposition 6.23 : Intersection d'une droite et d'une sphère

Soit une sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon R et une droite affine $\mathcal{D}$.

1. Si $d(A,\mathcal{D}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \emptyset$,
2. Si $d(A,\mathcal{D}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \{M_0\}$, (on dit que la droite est *tangente* à la sphère),
3. Si $d(A,\mathcal{D}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ est réduit aux deux points de la droite $\mathcal{D}$ situés à distance $\sqrt{R^2 - d^2(A,\mathcal{D})}$ du point H.

Proposition 6.24 : Intersection de deux sphères

Soient deux sphères $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ non-concentriques, l'intersection de ces deux sphères peut être :

1. vide,
2. réduite à un point,
3. un cercle.