Chapitre 4

Equations différentielles

4.1 Rappels d'intégration

Nous démontrerons plus tard les résultats suivants.

DÉFINITION 4.1 : **Primitives**
Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si et seulement si :

1. la fonction F est dérivable sur I ;
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 4.1 : **Deux primitives diffèrent d'une constante**
Soit $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et deux primitives $F,G :\mapsto \mathbb{R}$ de la fonction f sur l'intervalle I. Alors ces deux primitives diffèrent d'une constante :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \quad \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$$

THÉORÈME 4.2 : **Le théorème fondamental du calcul**

H1 Soit un *intervalle* I.

H2 Soit une fonction f *continue* sur I.

Soit un point $a \in I$. Alors la fonction

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. En d'autres termes, la fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule au point a.

COROLLAIRE 4.3 : **Théorème fondamental deuxième forme**
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors la formule suivante relie f et sa dérivée par une intégrale. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t}$$

4.2 Caractérisations de la fonction exponentielle

On considère un complexe $a \in \mathbb{C}$ et l'équation différentielle

$$(E)\ \ : y' = ay$$

Résoudre cette équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ dérivables vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = af(t)$$

Théorème 4.4 : Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

$$\mathcal{S} = \{f_\lambda;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

où $f_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{at} \end{cases}$

On se propose maintenant de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u)$$

La fonction exponentielle vérifie cette propriété. Considérons maintenant une fonction quelconque f dérivable vérifiant cette propriété. On montre que :

Théorème 4.5 : Résolution de l'équation fonctionnelle $f(t+u) = f(t)f(u)$

1. S'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$, alors f est la fonction nulle.
2. Si f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$.
3. Si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{at}$.

4.3 Equations du premier ordre linéaires

Définition 4.2 : Equation différentielle générale du premier ordre

Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de trois variables où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad F(y',y,t) = 0$$

si et seulement si :

1. y est une fonction dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I,\ F(y'(t),y(t),t) = 0$.

On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des fonctions y solutions de l'équation différentielle. On dit que deux équations différentielles sont *équivalentes* lorsqu'elles ont même ensemble de solutions. On appelle *courbe intégrale* de l'équation différentielle, une courbe représentative d'une solution $y \in \mathcal{S}_E$.

Définition 4.3 : Problème de Cauchy

Soit $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de trois variables où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(t_0,y_0) \in I\times\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}$ est solution du problème de Cauchy :

$$(C) \quad \begin{cases} F(y',y,t) & = 0 \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

si et seulement si :

1. y est une fonction dérivable sur l'intervalle I ;
2. $\forall t \in I,\ F(y'(t),y(t),t) = 0$;
3. $y(t_0) = y_0$.

Parmi les équations différentielles du premier ordre générales, on distingue :

– Les équations du premier ordre *explicites* de la forme :

$$(E) \quad y' = f(y,t)$$

où $f : \mathbb{R} \times I \mapsto \mathbb{R}$;

– Les équations du premier ordre *linéaires* de la forme :

$$(E) \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où $a,b,c : I \mapsto \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues sur l'intervalle I ;

– Les équations du premier ordre linéaires *normalisées* de la forme :

$$(E) \quad y' + \alpha(t)y = \beta(t)$$

où $\alpha,\beta : I \mapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur l'intervalle I.

Remarque 35. Si $y \in \mathcal{S}_E$, est une solution d'une équation différentielle explicite

$$(E) \quad y' = f(y,t)$$

alors en un point (t,y) de la courbe représentative de y, la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_y$ vaut $f(y,t)$. La connaissance de la fonction f permet de tracer un champ de vecteurs. En un point (t_0,y_0) du plan on représente un vecteur de pente $f(t_0,y_0)$. Alors un point $(t_0,y(t_0))$ d'une courbe intégrale de (E), le champ de vecteurs sera tangent à la courbe. C'est l'idée de la *méthode d'Euler*.

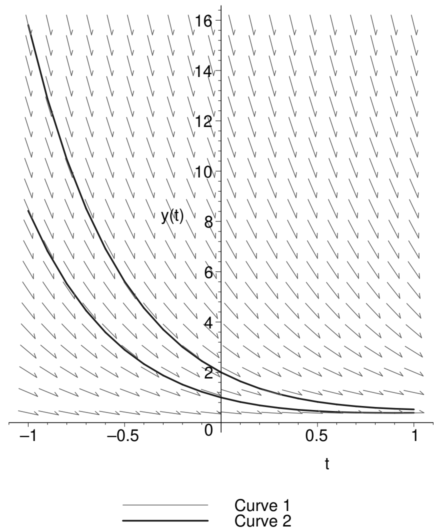

Fig. 4.1 – *Champ de vecteurs et courbes intégrales*

Définition 4.4 : **Équations différentielles linéaires du premier ordre**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a(t)$,$b(t)$,$c(t)$ trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $y(t) : I \mapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

si:

1. y est une fonction dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I$, $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Résoudre l'équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I.

Proposition 4.6 : Si la fonction $a(t)$ ne s'annule pas sur I, les solutions de (E) sont les solutions de l'équation normalisée :

$$(E') \quad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$

Dans ce qui suit, on considère une équation différentielle normalisée de la forme :

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

et *l'équation homogène* associée (avec second membre nul) :

$$(H) \quad y' + a(t)y = 0$$

4.3.1 Résolution de l'équation homogène

$$(H) \quad y' + a(t)y = 0$$

Théorème 4.7 : **Solutions de l'équation homogène**
Si $A : I \mapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une primitive de la fonction $a(t)$ sur l'intervalle I, alors on sait écrire directement l'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} \ ; \ C \in \mathbb{R}\}}$$

(pour des solutions complexes, $C \in \mathbb{C}$).

Remarque 36. Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions de l'équation homogène a une structure de droite vectorielle.

Exercice 4-1

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + y = 0$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. Dessiner l'ensemble des courbes intégrales. Trouver l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice 4-2

Résoudre l'équation différentielle $(E) : (1 + t^2)y' + 4ty = 0$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

Exercice 4-3

Trouver toutes les fonctions $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$, vérifiant :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt$$

4.3.2 Résolution de l'équation avec second membre

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

Théorème 4.8 : **Solutions de l'équation complète** Si l'on connaît une solution particulière $\widetilde{y}$ à l'équation complète, on a l'ensemble de toutes les solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} + \widetilde{y}(t) \ ; \ C \in \mathbb{R}\}}$$

Remarque 37.
1. Le théorème suivant justifie qu'il existe toujours une solution particulière.
2. Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions a une structure de droite affine.

Théorème 4.9 : **Résolution du problème de Cauchy**
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule solution de (E) vérifiant $y(t_0) = y_0$. (i.e. il existe une unique courbe intégrale de (E) passant par le point (t_0,y_0)). Cette solution est donnée sous forme intégrale :

$$\boxed{y(t) = e^{A(t_0)-A(t)}y_0 + e^{-A(t)}\int_{t_0}^t e^{A(u)}b(u)\,\mathrm{d}u}$$

Résolution pratique :

1. On résout l'équation homogène : la solution générale de l'équation homogène est de la forme $Ce^{-A(t)}$;
2. Y a-t-il une solution particulière évidente ? On peut utiliser le principe de superposition des solutions. Si le second membre est de la forme $c(t) = c_1(t) + \cdots + c_n(t)$ et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y_1}, \ldots, \widetilde{y_n}$ des équations avec second membre $c_i(t)$, alors la fonction

$$\widetilde{y}(t) = \widetilde{y_1}(t) + \cdots + \widetilde{y_n}(t)$$

   est une solution particulière de l'équation (E).
3. Si l'on ne voit pas de solution évidente, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $\widetilde{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où $C(t)$ est une fonction vérifiant

$$\boxed{C'(t)e^{-A(t)} = b(t)}$$

   c'est la méthode de la *variation de la constante* ;

4. On écrit la solution générale de l'équation complète.

Exercice 4-4

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + ty = t$$

Exercice 4-5

Résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$,

$$y' + 2xy = e^{x-x^2}$$

Exercice 4-6

Résoudre sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$$

4.3.3 Méthode d'Euler

On considère le problème de Cauchy pour une équation différentielle du premier ordre explicite :

$$\begin{cases} y' & = f(t,y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Même si l'équation différentielle est linéaire, sa résolution passe par un calcul de primitives, or on ne sait calculer que très peu de primitives. Lorsque l'équation différentielle est non-linéaire, il est en général impossible de déterminer la solution explicite du problème de Cauchy. On a recours à des méthodes numériques de calcul approché de solutions. La plus simple de ces méthodes est la *méthode d'Euler* qui se base sur une idée géométrique simple.
L'idée est d'approximer la dérivée de y au point t par un taux d'accroissement :

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

ou de manière équivalente, d'approximer la courbe de y par sa tangente en t_0. Comme $\dfrac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \approx f(t_0,y_0)$, on en déduit que $y(t_0+h) \approx y_0 + f(t_0,y_0)$. Connaissant la valeur de y en $t_0 + h$, on peut recommencer pour obtenir une approximation de $y(t_0 + kh)$.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_0 + nh, y_n)$$

Le réel y_n est une approximation de $y(t_0 + nh)$.

4.4 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Définition 4.5 : **Equation linéaire du second ordre à coefficients constants**
Soient trois complexes $(a,b,c) \in \mathbb{C}$, et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $y : I \mapsto \mathbb{C}$ est une solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + ay' + by = f(t)$$

si

1. y est une fonction deux fois dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I$, $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$.

On notera $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) sur I.

4.4.1 Résolution de l'équation homogène

On considère l'équation homogène

$$(H): \quad y'' + ay' + by = 0$$

et l'on note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions sur I.

THÉORÈME 4.10 : **Structure de l'ensemble des solutions**
$\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2. Soit

$$(C): \quad r^2 + ar + b = 0$$

l'*équation caractéristique* associée. Alors :

1. Si (C) possède deux racines distinctes r_1, r_2, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

2. Si (C) possède une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{rt} + Bte^{rt} \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

THÉORÈME 4.11 : **Solutions réelles de l'équation homogène**
Lorsque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche des solutions $y : I \mapsto \mathbb{R}$ réelles. L'ensemble des solutions réelles est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2. On considère l'équation caractéristique

$$(C) \quad r^2 + ar + b = 0$$

1. Si (C) possède deux racines réelles distinctes r_1, r_2, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

2. Si (C) possède une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{rt} + Bte^{rt} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

3. Si (C) ne possède pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées $r_1 + ir_2$ et $r_1 - ir_2$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{r_1 t}\cos(r_2 t) + Be^{r_1 t}\sin(r_2 t) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Exercice 4-7
Résoudre $y'' = \omega^2 y$ et $y'' = -\omega^2 y$ (solutions réelles).

Exercice 4-8
Résoudre $y'' - 4y' + 13y = 0$ (solutions réelles).

Exercice 4-9
Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$ (solutions réelles).

4.4.2 Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme

On considère l'équation complète

$$(E) \quad y'' + ay' + by = f(t)$$

avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k t} P_k(t)$ où $m_k \in \mathbb{C}$ et $P_k(t)$ est un polynôme en t.

THÉORÈME 4.12 : **Structure de l'ensemble des solutions**
Soit $\widetilde{y}$ une solution particulière de (E). L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un espace affine de dimension 2 (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{Ay_0^1(t) + By_0^2(t) + \widetilde{y}(t); (A,B) \in \mathbb{K}^2\}}$$

où y_0^1 et y_0^2 forment une base de $\mathcal{S}_H$.

THÉORÈME 4.13 : **Principe de superposition**
Si $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$ et si $\widetilde{y}_i(t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre $f_i(t)$, alors

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_i(t)$$

est une solution particulière de l'équation avec second membre $f(t)$.

Recherche pratique d'une solution particulière

THÉORÈME 4.14 : **Recherche d'une solution particulière complexe**
On sait trouver une solution particulière complexe pour un second membre de la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k t} P_k(t), \quad m_k \in \mathbb{C},\ P_k \in \mathbb{C}[X]$$

1. En utilisant le principe de superposition, on se ramène à chercher une solution particulière pour un second membre de la forme $f(t) = e^{mt}P(t)$.
2. Si m n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme
$$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t) \text{ avec } \deg(Q) = \deg(P)$$
3. Si m est racine simple de (C), il existe une solution particulière de la forme
$$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t) \text{ avec } \deg(Q) = \deg(P) + 1 \text{ et } Q(0) = 0$$
4. Si m est racine double de (C), il existe une solution particulière de la forme
$$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t) \quad Q''(t) = P(t)$$

Théorème 4.15 : **Recherche d'une solution particulière réelle**
On sait trouver une solution particulière réelle pour un second membre de la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k t} P_k(t) \quad m_k \in \mathbb{R},\ P_k \in \mathbb{R}[X]$$

avec la même méthode que pour la recherche d'une solution complexe. On sait également trouver une solution particulière réelle pour un second membre de la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\alpha_k t} \big[P_k(t) \cos(\beta_k t) + Q_k(t) \sin(\beta_k t)\big] \quad \alpha_k,\beta_k \in \mathbb{R},\ P_k,Q_k \in \mathbb{R}[X]$$

1. Par le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière avec un second membre de la forme

$$f(t) = e^{\alpha t} \big[P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t)\big] \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ P,Q \in \mathbb{R}[X]$$

2. Si le complexe $m = \alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution réelle de la forme :

$$\widetilde{y}(t) = e^{\alpha t} \big[A(t) \cos(\beta t) + B(t) \sin(\beta t)\big] \text{ avec } A,B \in \mathbb{R}_n[X] \text{ où } n = \max(\deg P, \deg Q)$$

3. Si le complexe $m = \alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, il existe une solution réelle de la forme :

$$\widetilde{y}(t) = e^{\alpha t} \big[A(t) \cos(\beta t) + B(t) \sin(\beta t)\big] \text{ avec } A,B \in \mathbb{R}_n[X]$$

où $n = 1 + \max(\deg P, \deg Q)$ et $A(0) = B(0) = 0$.

Exercice 4-10
Résoudre $y'' - y' - 2y = 3e^t + 1$ (solutions réelles).

Exercice 4-11
Résoudre $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^{2t}$ (solutions réelles).

Exercice 4-12
Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$ (solutions réelles).
