Devoir à la maison n°7
Corrigé

ln désigne la fonction “logarithme népérien” ; e est l'unique réel positif tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui associe au réel x, lorsque cela est possible, le réel $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
Dans le plan rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on appelle (C) la courbe représentant f et (Γ) la courbe d'équation $y = \ln x$.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + 1 \geqslant 1$ et donc $\sqrt{x^2+1}$ est défini.
   Si $x \geqslant 0$, alors $x^2 + 1 \geqslant 1$ et donc $\sqrt{x^2+1} + x \geqslant 1 + x \geqslant 1$.
   Si $x < 0$ alors $x^2 + 1 > x^2$ et donc $\sqrt{x^2+1} > |x| = -x$ d'où $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   On a prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression $x + \sqrt{x^2+1}$ est définie et strictement positive : f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) $\mathbb{R}$ est évidemment symétrique par rapport à 0 et pour tout x,
   $$f(-x) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$
   $$f(x) = -f(x)$$
   f est impaire : on en déduit que (C) est symétrique par rapport à O.

   (c) De façon évidente, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = +\infty$; de plus, $\lim\limits_{T\to+\infty} \ln T = +\infty$.
   Par composition, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   f étant impaire, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   (d) La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1; +\infty[$.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc sur $[1; +\infty[$.
   Par composition, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   La fonction linéaire $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, on a vu que cette fonction est à valeurs dans $]0; +\infty[$; ln étant dérivable sur cet intervalle, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

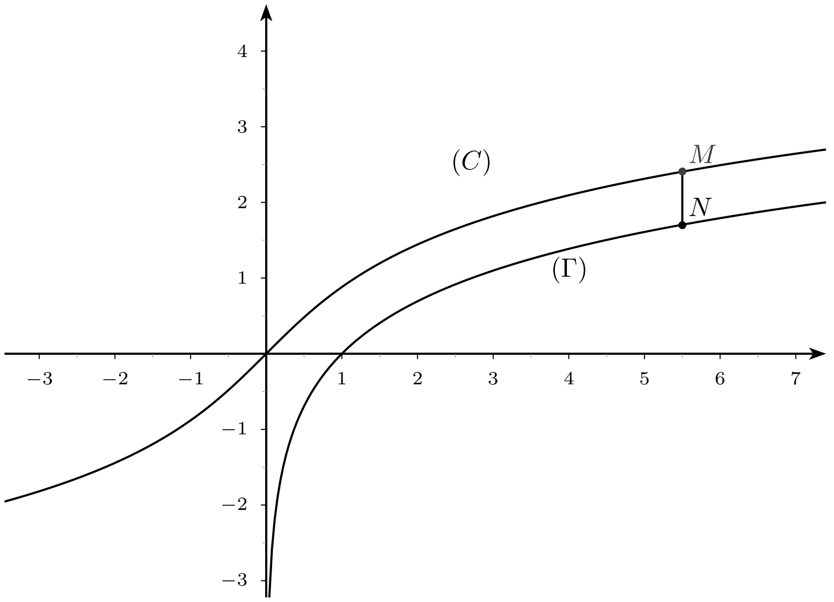
   (e) il résulte de ce qui précède que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Une propriété de la courbe (C) : on pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = f(x) - \ln x$.
   (a) Pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \ln x = \ln\left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right)$.

   Comme $\dfrac{1}{x^2} > 0$, il vient : $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} > 1$ et ainsi, $\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1} > 2$ et $g(x) > \ln 2$.
   Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la courbe de la fonction ln est strictement au dessus de la courbe (C).

   (b) Lorque $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x} \to 0$ et $\left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right) \to 2$. Comme la limite en 1 de la fonction ln est 0, il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ln 2$.
   Soit M le point d'abscisse x de la courbe (C) et N le point de Γ de même abscisse x : la limite ci-dessus indique que la distance MN tend vers $\ln 2$ quand $x \to +\infty$.

(c) Figure :



3. Pour tout x réel, on appelle **fonction sinus hyperbolique** la fonction sinh définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) Soit x et y deux réels.
Si $f(x) = y$, alors $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ et $x^2 + 1 = (e^y - x)^2$ et ainsi, $x^2 + 1 = e^{2y} - 2xe^y + x^2$.
On en déduit que $2xe^y = e^{2y} - 1$ et $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$.
Si $x = \sinh y$, alors $f(x) = f(\sinh y) = \ln(e^y) = y$.
D'où l'équivalence annoncée.

(b) Il s'ensuit que f et sinh sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{-1} = \sinh$.

(c) Dans un repère orthonormé, on obtiendrait la courbe de $\sin h$ à partir de celle de f par symétrie orthogonale d'axe (d) d'équation $y = x$.