Devoir à la maison n°4
Corrigé

Exercice 1.

Il s'agit dans ce problème de déterminer toutes les fonctions f, définie sur l'intervalle ouvert $]0;+\infty[$, dérivables en 1 et telles que :

$$\forall x, y \in]0;+\infty[, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Analyse du problème : On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant les hypothèses faites ci-dessus et on pose $f'(1) = a$.

1. $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$.
2. Pour tout h non nul, $h > -1$, $\dfrac{f(1+h)}{h} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

   Or f est dérivable en 1, de nombre dérivé a, et donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = a$.
3. Soit $x > 0$ et h un réel non nul, $h > -x$.

$$f(x+h) = f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) = f(x) + f\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

   Comme f est dérivable en 1, de nombre dérivé a, on peut écrire :

$$f(1+h) = f(1) + ah + h\varphi(h), \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

   soit encore, puisque $f(1) = 0$,

$$f(1+h) = ah + h\varphi(h), \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

   Ainsi,

$$f\left(1+\frac{h}{x}\right) = a\frac{h}{x} + \frac{h}{x}\varphi\left(\frac{h}{x}\right)$$

   et

$$f(x+h) = f(x) + a\frac{h}{x} + \frac{h}{x}\varphi\left(\frac{h}{x}\right)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a}{x} + \frac{1}{x}\varphi\left(\frac{h}{x}\right)$$

   Lorsque h tend vers 0, $\varphi\left(\dfrac{h}{x}\right)$ tend vers 0 aussi et $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $\dfrac{a}{x}$.

   f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et , pour tout x, le nombre $f'(x) = \dfrac{a}{x}$.
4. En terme de primitive, f est l'unique primitive $]0;+\infty[$ sur de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ qui s'annule en 1.
5. Si $a = 0$, alors $f' = 0$ et f est constante sur $]0;+\infty[$; comme $f(1) = 0$, f est la fonction nulle sur $]0;+\infty[$.

Synthèse du problème : Soit a un réel et f l'unique primitive, sur $]0;+\infty[$, de la fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, qui s'annule en 1.

1. $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc cette fonction admet sur $]0;+\infty[$ une unique primitive f qui s'annule en 1.
2. Si $a = 0$, alors f est constante égale à 0 sur $]0;+\infty[$: elle vérifie évidemment les contraintes de l'énoncé.
3. On suppose dans cette question que $a \neq 0$.
   (a) f est dérivable en 1 puisque f est une primitive de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ sur $]0;+\infty[$

(b) Fixons $y > 0$ et considérons la fonction $g : x \mapsto f(xy) - f(x)$.
$x \mapsto xy$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]0;+\infty[$.
Par composition, $x \mapsto f(xy)$ est donc dérivable sur $]0;+\infty[$.
On en déduit que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $g'(x) = y\dfrac{a}{xy} - \dfrac{a}{x} = 0$: g est donc constante sur $]0;+\infty[$ et ainsi, pour tout x, $g(x) = g(1) = f(y)$.
On en déduit que pour tout $x > 0$, tout $y > 0$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Conclusion : L'ensemble des fonctions répondant au problème est constitué de la primitive de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 2.
Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = \mathrm{e}^a - 1$.
   Une équation de (T) est donc $y = f'(a)(x-a) + f(a) = (\mathrm{e}^a - 1)\,x + \mathrm{e}^a(1-a) - 1$.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point $N(X\ ;\ Y)$; X est donc solution de l'équation

$$-X - 1 = X\,(\mathrm{e}^a - 1) + \mathrm{e}^a(1-a) - 1$$

   ce qui équivaut à $X = b = a - 1$.
3. Pour construire la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse a, il suffit de construire le point de (D) d'abscisse $a-1$ et la tangente est obtenue en joignant ce point à M. Voir annexe, où $a = 1.5$.

Partie B

1. Graphiquement, on lit que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$ (et $f(0) = 0$).
2. On a donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
   En appliquant cette inégalité à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient (1) $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ et en l'appliquant à $x = -\dfrac{1}{n+1}$, on obtient (2) $\mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
3. La fonction $x \longmapsto x^n$, $(n \in \mathbb{N})$, étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, (1) donne $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ c'est-à-dire $\mathrm{e} \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ce qui est la même chose que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

4. De même, (2) donne $\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-1} \geqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.
   En passant aux inverses (tous les nombres étant positifs strictement), $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \mathrm{e}$, soit encore

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 3. montre que e majore $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   4. s'écrit $\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ d'où l'on tire que $\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \times \left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ et $\dfrac{n}{n+1}\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   On obtient donc l'encadrement :

$$\frac{n}{n+1}\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}.$$

   Par application du théorème des « gendarmes », comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

ANNEXE

À rendre avec la copie