Devoir à la maison n°3

A rendre le 09.11.2009

1. Dans cette question, on cherche à déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :
$$(1+x^2)f'(x) - 2xf(x) = 0$$
Les fonctions satisfaisant cette relation sont les **solutions** de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.
Dans cette équation, l'inconnue y est une fonction et y' désigne la dérivée de cette fonction.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ cette équation différentielle, c'est en déterminer **toutes** les fonctions solutions. Dans cette équation interviennent seulement une fonction et sa dérivée première : cette équation différentielle est dite du **premier ordre**.
   (a) Prouver que la fonction $x \mapsto 1+x^2$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = 0$.
   (b) Soit f une solution de $(1+x^2)y' - 2xy = 0$; prouver que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^2+1}$ est constante.
   (c) En déduire que **si** f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = 0$, alors il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = k(1+x^2)$.
   (d) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = 0$?
   (e) Prouver que parmi toutes les solutions de l'équation différentielle, il en existe une seule prenant la valeur 1 en 0. Donner l'expression de cette solution.
2. On considère maintenant l'équation différentielle du premier ordre $y' = y$ et on veut la résoudre sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner en faisant appel au cours de cette année, une solution de cette équation définie sur $\mathbb{R}$ et prenant la valeur 1 en 0.
   (b) Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = y$. Prouver que la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de $y' = y$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle du second ordre $y'' = x$.