Quelques exercices sur les séries de Fourier

PC*2

3 avril 2003

1. (Cen 99) Calculer, pour $|\alpha| \neq 1$:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{nit}}{\alpha - \mathrm{e}^{it}} \,\mathrm{d}t$$
2. (Mines 02) Soit f la fonction paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que $a_n(f) = O\left(n^{-3/2}\right)$ et que la suite $(S_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.
3. (TPE 99 et Cen 2001) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, 2π périodique telle que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,\mathrm{d}t = 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$$
   (b) Montrer que :
   $$||f||_\infty^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$$
   (c) Soit $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $g(0) = g(1) = 0$. Montrer que :
   $$||g||_\infty^2 \leq \frac{1}{3} \int_0^1 g'(t)^2 \,\mathrm{d}t$$
4. (Cen 98 et 2000) Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.
   (a) Prouver la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n(f)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n(f)}{n}$. Exprimer la somme de cette dernière série en fonction de
   $$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t) f(t) \,\mathrm{d}t$$

(b) On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$F(x) = C + \frac{a_0(f)\,x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\sin nx - b_n(f)\cos nx}{n}$$

5. (Cen 98) En se servant du développement en série de Fourier de la fonction qui vaut $\cos ax$ sur $[-\pi, \pi]$, déterminer :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right]$$

6. (Cen 98) Existe-t-il une suite réelle (a_n) *resp* (b_n) telle que :

$$\forall x \in]0, \pi[,\ x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \textit{resp} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx$$

7. (Ens 97 et 98)
   (a) Développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique qui vaut x sur $[-\pi, \pi[$.
   (b) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.
   (c) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$ telle que $f(a) = f(b)$. On note m la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b],\ |f(x) - m|^2 \leq \frac{b-a}{12}\int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

   (d) Trouver tous les cas d'égalité.
8. (X 98) Montrer que l'on peut écrire pour tout couple (x, t) de réels :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos x} = J_0(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^n\, J_n(t)\cos nx$$

   Etudier le comportement de $J_n(t)$ quand $t \to +\infty$.
9. (X 98) On pose :

$$u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin(\pi n x)}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$$

   Donner un équivalent de u_n. *(NDLR : Supprimer la singularité en* 0 *et utiliser Riemann-Lebesgue).*

10. (Mines 98) Développement en série de Fourier de

$$t \mapsto \frac{1}{1+\cos^2 t}$$

11. (X98) Soit f continue par morceaux, 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Déterminer un polynôme trigonométrique P_n tel que, pour tout x :

$$\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{c_k(f)}{k}\,\mathrm{e}^{k\mathrm{i}x} = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{c_k(f)}{k}$$

12. (Mines 98, 99, 2001) On considère les fonctions :

$$f_1 = \max(\sin, 0) \quad f_2 = \sin \quad f_3 = |\sin|$$

$$f_4 = \cos \quad f_5 = |\cos| \quad f_6 = \max(\cos, 0)$$

En calculant un développement en série de Fourier déduire tous les autres.

13. (Mines 98) Calculer, pour $n \in \mathbf{Z}$:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\cos(\sin t - nt)\,\mathrm{d}t$$

14. (X 98) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$, 2π-périodique. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^{2\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

15. (X 98) Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 2π-périodique. Montrer que la fonction $f' + f^{(3)}$ s'annule en au moins quatre points distincts sur une période.

16. (Mines 99) Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour x, y dans le segment $[0,1]$:

$$K(x,y) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n x)\sin(\pi n y)}{n^2}$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ et g définie sur $[0,1]$ par :

$$g(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

Montrer que $g \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbf{R})$, $g" = -f$, $g(0) = g(1) = 0$.

(c) Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose :

$$\gamma_n = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x$$

Prouver que :

$$\int_0^1 g(x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n^2}{n^4}$$

17. (X 99) Soit $u : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ vérifiant l'équation différentielle :

$$u"(x) + (\lambda - 2\cos x)u(x) = 0$$

(a) Relation de récurrence entre les coefficients de Fourier complexes de u.

(b) Montrer que l'espace vectoriel des suites bornées qui vérifient cette relation est de dimension ≤ 1. On pourra introduire :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{vmatrix}$$

(c) Montrer que $(c_k(u))_{k\in Z}$ est soit paire soit impaire.

18. (Ens 2001) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence infini dont on note f la somme. Montrer que, si f est bornée sur $\mathbf{C}$, alors f est constante.

19. (Ens 99) Soit H_n l'ensemble des polynômes trigonométriques complexes 2π-périodiques de degré au plus égal à n. Pour $k \in \mathbf{Z}$ on note $\widehat{P}(k)$ le coefficient de Fourier d'indice k de P. On pose :

$$F_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta}$$

et

$$G_n(\theta) = \sin(n\theta) F_n(\theta)$$

enfin :

$$I_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta - \phi) G_n(\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

   (a) Soit $P \in H_n$, relation entre les coefficients de Fourier de P, I_n, F_n ?

   (b) Montrer que $\widehat{G_n}(k) = -(\mathrm{i}k)/2n$ pour $-n \leq k \leq n$.

   (c) Montrer que $I_n(\theta) = -\mathrm{i}\,P'(\theta)/2n$.

   (d) Prouver l'inégalité :

$$||P'||_\infty \leq 2n||P||_\infty$$

20. (X 2001) Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha \end{cases}$$

   (a) Étudier la série de Fourier de f et sa convergence.

   (b) Que vaut la somme de cette série en $x = 0$ et $x = \alpha$? Commenter.

   (c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\,\alpha)}{n^2}$.

   (d) Justifier l'existence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

21. (Mines 2002) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, 2π-périodique telle qu'existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|^\alpha$$

(a) Soit $a \in \mathbf{R}$, rappeler l'expression des coefficients de Fourier complexes de $t \mapsto f(t+a)$.

(b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$:

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{2} \left| \frac{\pi}{n} \right|^{\alpha}$$

(c) Montrer que, si $\alpha > 1$, f est constante.

(d) Montrer que, si $\alpha > 1/2$, f est somme de sa série de Fourier. *[difficile ; considérer $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+a) - f(t-a)|^2 \, \mathrm{d}t$].*