



## Géométrie du plan

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
 I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1 \*\*I

$(ABC)$  est un vrai triangle.

1. Montrer que ses médianes sont concourantes en  $G$  l'isobarycentre de  $(ABC)$ .
2. Montrer que ses médiatrices sont concourantes en  $O$  le centre du cercle circonscrit à  $(ABC)$ .
3. Montrer que ses hauteurs sont concourantes en  $H$  l'orthocentre de  $(ABC)$  puis montrer la relation d'EULER :  
 $\vec{OH} = 3\vec{OG}$  (considérer l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-2$ ).
4. Montrer que ses bissectrices (intérieures) sont concourantes en  $I$  le centre du cercle inscrit.

[Correction ▼](#)

[005195]

### Exercice 2 \*\*IT

On donne les points  $A(1, 2)$ ,  $B(-2, 1)$  et  $C(0, 4)$ .

1. Déterminer  $\widehat{BAC}$  au degré près.
2. Déterminer l'aire du triangle  $(ABC)$ .
3. Déterminer son isobarycentre, son orthocentre, le centre de son cercle circonscrit puis une équation de ce cercle.
4. Déterminer une équation des bissectrices de l'angle  $\widehat{BAC}$  puis de la bissectrice intérieure à l'angle  $\widehat{A}$ .

[Correction ▼](#)

[005196]

### Exercice 3 \*IT

Déterminer le projeté orthogonal du point  $M(x_0, y_0)$  sur la droite  $(D)$  d'équation  $x + 3y - 5 = 0$  ainsi que son symétrique orthogonal.

[Correction ▼](#)

[005197]

### Exercice 4 \*

Soit  $(ABDC)$  un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de  $D$  dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ .

[Correction ▼](#)

[005198]

### Exercice 5 \*\*

Soit  $(E)$  l'ensemble d'équation cartésienne  $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$ . Montrer que  $(E)$  est une réunion de deux droites. Déterminer l'aire du parallélogramme formé par ces deux droites et les parallèles à ces deux droites passant par  $O$ .

[Correction ▼](#)

[005199]

### Exercice 6 \*\*

Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives  $y = 2x + 1$ ,  $y = 2x + 7$  et  $y = -\frac{1}{2}x$ .

[Correction ▼](#)

[005200]

### Exercice 7 \*\*I

1.  $h$  (resp.  $h'$ ) est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  (resp.  $k'$ ) non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $h' \circ h$ .
2.  $s$  (resp.  $s'$ ) est la symétrie centrale de centre  $\Omega$  (resp.  $\Omega'$ ). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $s' \circ s$ .
3.  $s$  est la symétrie centrale de centre  $\Omega$  et  $t$  est la translation de vecteur  $\vec{u}$ . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $t \circ s$ .

[Correction ▼](#)

[005201]

### Exercice 8 \*\*\*I

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, puis  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  points du plan. Existe-t-il  $n$  points  $B_1, B_2, \dots, B_n$  tels que, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_i$  soit le milieu de  $[B_i, B_{i+1}]$  (avec la convention  $B_{n+1} = B_1$ ) ? (Utiliser l'exercice précédent.)

[Correction ▼](#)

[005202]

### Exercice 9 \*T

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ .

1. Déterminer une équation de la tangente au point de  $\mathcal{C}$  de coordonnées  $(2, -2 + \sqrt{3})$ .
2. Déterminer l'intersection de  $\mathcal{C}$  et du cercle de centre  $(1, 0)$  et de rayon 2.

[Correction ▼](#)

[005203]

### Exercice 10 \*\*\* Théorème de MÉNÉLAÛS

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés. Soient  $M, N$  et  $P$  trois points appartenant respectivement aux droites  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  et distincts de  $A, B$  et  $C$ . Montrer que :

$$(M, N, \text{ et } P \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \left( \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \right).$$

(Trouver une démonstration utilisant le théorème de THALÈS, une utilisant la composée de deux homothéties et une utilisant des coordonnées.)

[Correction ▼](#)

[005204]

### Exercice 11 \*\*\*

Construire l'ensemble des points  $M$  de coordonnées polaires  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)} + \sqrt{1-\sin(2\theta)}} \text{ (commencer par étudier toutes les symétries de l'ensemble considéré).}$$

[Correction ▼](#)

[005205]

### Exercice 12 \*\*

Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux points d'intersection des lignes d'une feuille blanche quadrillée usuelle.

[Correction ▼](#)

[005206]

### Exercice 13 \*T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1.  $z' = z + 3 - i$
2.  $z' = 2z + 3$

3.  $z' = iz + 1$

4.  $z' = (1 - i)z + 2 + i$

[Correction ▼](#)

[005207]

---

**Exercice 14** \*\* Faisceaux de droites

1. Soient  $(D)$  et  $(D')$  deux droites sécantes d'équation respectives  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $(a', b') \neq (0, 0)$ . Soit  $(\Delta)$  une droite. Montrer que  $(D)$ ,  $(D')$  et  $(\Delta)$  sont concourantes si et seulement si il existe  $(\lambda, \mu)$  a une équation cartésienne de la forme  $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ .
2. Equation cartésienne de la droite passant par le point  $(1, 0)$  et par le point d'intersection des droites d'équations respectives  $5x + 7y + 1 = 0$  et  $-3x + 2y + 1 = 0$
3. Pour  $m \in \mathbb{R}$ , on considère  $(D_m)$  la droite d'équation  $(2m - 1)x + (m + 1)y - 4m - 1 = 0$ . Montrer que les droites  $(D_m)$  sont concourantes en un point  $A$  que l'on précisera. Toute droite passant par  $A$  est-elle une droite  $(D_m)$  ?

[Correction ▼](#)

[005208]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

- Soit  $G$  l'isobarycentre du triangle  $(ABC)$ . On a donc  $G = \text{bar}(A(1), B(1), C(1))$ . Notons  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les milieux respectifs des côtés  $[B, C]$ ,  $[C, A]$  et  $[A, B]$ . D'après le théorème du barycentre partiel,  $G = \text{bar}(A(1), A'(2))$ . En particulier,  $G$  est sur la médiane  $(AA')$ . De même,  $G$  est sur la médiane  $(BB')$  et sur la médiane  $(CC')$ .

Finalement,  $G$  est sur les trois médianes. les trois médianes sont donc concourantes en  $G$ .

- Les droites  $(BC)$  et  $(CA)$  ne sont pas parallèles. Par suite, les médiatrices respectives des côtés  $[B, C]$  et  $[C, A]$  ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point que l'on note  $O$ . Par définition de  $O$ , on a  $OA = OB = OC$ .  $O$  est donc à égale distance de  $A$  et  $B$  et est ainsi sur la médiatrice de  $[A, B]$ . Finalement, les trois médiatrices sont concourantes en  $O$ . De plus,  $O$  étant à égale distance de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$  passe par  $B$  et  $C$ .

Réciproquement, un cercle passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$  a pour centre un point à égale distance de ces points et donc nécessairement de centre  $O$  et de rayon  $OA$ . Ceci démontre l'existence et l'unicité du cercle circonscrit au triangle  $(ABC)$  : c'est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ .

- Les hauteurs issues de  $A$  et  $B$  ne sont pas parallèles (car perpendiculaires à deux droites non parallèles). Elles admettent ainsi un et un seul point d'intersection. Ceci assure l'unicité d'un point commun aux trois hauteurs.

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-2$ . Puisque  $\vec{GA} = -2\vec{GA}$ , on a  $h(A') = A$  et de même  $h(B') = B$  et  $h(C') = C$ .

Par  $h$ , l'image de la médiatrice de  $[B, C]$ , c'est-à-dire de la droite passant par  $A'$  et perpendiculaire à  $(BC)$  est la droite passant par  $h(A') = A$  et perpendiculaire à  $(BC)$  (car parallèle à la médiatrice de  $[B, C]$ ). Cette droite est la hauteur issue de  $A$  du triangle  $(ABC)$ . De même, les images des médiatrices de  $[C, A]$  et  $[A, B]$  sont respectivement les hauteurs issues de  $B$  et  $C$ .

Le point  $O$  est sur les trois médiatrices. Son image par  $h$  est donc sur les trois hauteurs (d'où l'existence d'un point commun aux trois hauteurs). Ces trois hauteurs sont ainsi concourantes en un point noté  $H$  et appelé l'orthocentre du triangle  $(ABC)$ . De plus, l'égalité  $h(O) = H$  s'écrit  $\vec{GH} = -2\vec{GO}$  ou encore  $\vec{GO} + \vec{OH} = 2\vec{OG}$  ou enfin,

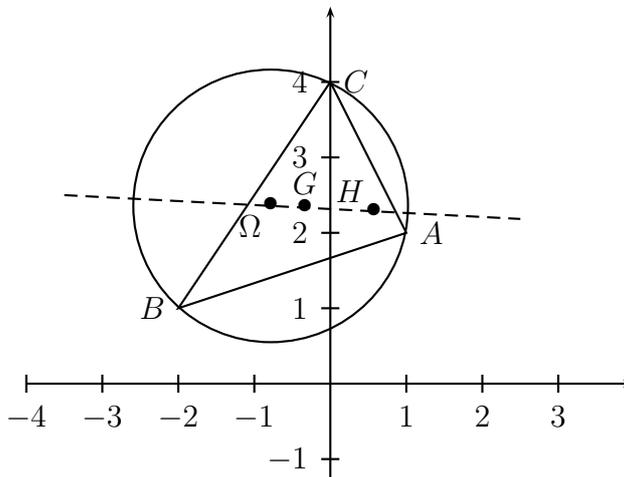
$$\boxed{\vec{OH} = 3\vec{OG} \text{ EULER.}}$$

Les trois points  $O$ ,  $G$  et  $H$ , s'ils sont deux à deux distincts, sont en particulier alignés sur une droite appelée **droite d'EULER** du triangle  $(ABC)$ .

- Deux bissectrices intérieures ne sont pas parallèles (démontrez-le) et sont donc sécantes en un point  $I$  à égale distance des trois côtés et à l'intérieur du triangle  $(ABC)$ . Ce point étant à égale distance des trois côtés est centre du cercle tangent intérieurement aux trois côtés, le cercle inscrit.

**Correction de l'exercice 2 ▲**

(Notez bien l'alignement des points  $G$ ,  $H$  et  $O$ ).



1. On a  $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$  et  $AC = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$ . Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{(-3)(-1) + (-1)(2)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Par suite,  $\widehat{BAC} = 81^\circ$  à un degré près.

2.  $\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \text{abs} \left( \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = \frac{7}{2}.$

3. Notons  $G$  l'isobarycentre du triangle  $(ABC)$ .  $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(1 + 2i - 2 + i + 4i) = \frac{1}{3}(-1 + 7i),$

et donc  $G(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}).$

Notons  $(x, y)$  les coordonnées de  $\Omega$ , le centre du cercle circonscrit au triangle  $(ABC)$  (dans cette exercice, la lettre  $O$  désigne certainement l'origine du repère).

$$\begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \Omega A = \Omega C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y-4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - 4y = -11 \end{cases} \\ \Rightarrow x = -\frac{11}{14} \text{ et } y = \frac{33}{14} \text{ (d'après les formules de CRAMER),}$$

et donc

$\Omega(-\frac{11}{14}, \frac{33}{14}).$

Notons  $(x, y)$  les coordonnées de l'orthocentre  $H$  du triangle  $(ABC)$ .

**1ère solution.**

$$\begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 3(y-2) = 0 \\ -(x+2) + 2(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow x = \frac{4}{7} \text{ et } y = \frac{16}{7} \text{ (d'après les formules de CRAMER),}$$

et donc,  $H(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}).$

**2ème solution.** Il est bien meilleur de connaître la relation d'EULER  $\vec{\Omega H} = 3\vec{\Omega G}$  et de l'utiliser.

$$H = \Omega + 3\vec{\Omega G} = \left( -\frac{11}{14}, \frac{33}{14} \right) + 3 \left( \frac{-\frac{1}{3} + \frac{11}{14}}{\frac{7}{3} - \frac{33}{14}} \right) = \left( \frac{4}{7}, \frac{16}{7} \right).$$

Pour trouver le cercle circonscrit au triangle  $(ABC)$ , on a déjà le centre  $\Omega$  et le rayon

$$\Omega A = \sqrt{\left(1 + \frac{11}{14}\right)^2 + \left(2 - \frac{33}{14}\right)^2} = \frac{1}{14} \sqrt{25^2 + 5^2} = \frac{5}{14} \sqrt{5^2 + 1} = \frac{5\sqrt{26}}{14}.$$

Il n'y a plus qu'à écrire l'équation cherchée :

$$\left(x + \frac{11}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{33}{14}\right)^2 = \frac{325}{98} \text{ ou encore } x^2 + y^2 + \frac{11}{7}x - \frac{33}{7}y + \frac{20}{7} = 0.$$

Néanmoins, on peut trouver directement une équation de ce cercle. Les points  $A, B$  et  $C$  n'étant pas alignés, on sait que le cercle circonscrit existe et est unique.

Soient alors  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}$  le cercle d'équation  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

$$(A, B, C) \in \mathcal{C}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = -5 \\ -2a + b + c = -5 \\ 4b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4b - 16a - 2b = 11 \\ -2a - 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{7} \\ b = -\frac{33}{7} \\ c = \frac{20}{7} \end{cases} \text{ (CRAMER)}$$

4. Les bissectrices de l'angle  $A$  sont les deux droites constituées des points à égale distance des droites  $(AB)$  et  $(AC)$ . Ces deux droites admettent pour vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}_1(1, -3)$  et  $\vec{n}_2(2, 1)$ .

Soit  $M(x, y)$  un point du plan.

$$\begin{aligned} d(M, (AB)) = d(M, (AC)) &\Leftrightarrow \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1)^2}{\|\vec{n}_1\|^2} = \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_2)^2}{\|\vec{n}_2\|^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{((x-1) - 3(y-2))^2}{10} = \frac{(2(x-1) + (y-2))^2}{5} \Leftrightarrow (x-3y+5)^2 = 2(2x+y-4)^2 \\ &\Leftrightarrow [(x-3y+5) + \sqrt{2}(2x+y-4)] \cdot [(x-3y+5) - \sqrt{2}(2x+y-4)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1+2\sqrt{2})x + (-3+\sqrt{2})y + 5 - 4\sqrt{2} = 0 \text{ ou } (1-2\sqrt{2})x - (3+\sqrt{2})y + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow y = (1+\sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} \text{ ou } y = (1-\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

La bissectrice intérieure  $\delta_A$  de l'angle  $\hat{A}$  est la droite (pour certains, cette bissectrice est une demi-droite) passant par  $A(2, 1)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u} = -\sqrt{10} \cdot (\frac{1}{AB}\vec{AB} + \frac{1}{AC}\vec{AC})$ . Ce vecteur a pour coordonnées  $(3 + \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$ .

Soit  $M(x, y)$  un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \delta_A &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})(x-1) - (3+\sqrt{2})(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})x - (3+\sqrt{2})y + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = (1-\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

$(D)$  est une droite de vecteur normal  $(1, 3)$ . Le projeté orthogonal  $p(M_0)$  de  $M_0$  sur  $(D)$  est de la forme  $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$  où  $\lambda$  est un réel à déterminer. Le point  $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$  a pour coordonnées  $(x_0 + \lambda, y_0 + 3\lambda)$ .

$$M_0 + \lambda \cdot \vec{n} \in (D) \Leftrightarrow (x_0 + \lambda) + 3(y_0 + 3\lambda) - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}.$$

$p(M_0)$  a pour coordonnées  $(x_0 + \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}, y_0 + 3 \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10})$  ou encore  $(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10}, \frac{-3x_0 + y_0 + 15}{10})$ .

Le symétrique orthogonal  $s(M_0)$  vérifie :  $s(M_0) = M_0 + 2\overrightarrow{M_0 p(M_0)}$ .

Ses coordonnées sont donc  $(x_0 + 2(\frac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10} - x_0), y_0 + 2(\frac{-3x_0 + y_0 + 15}{10} - y_0))$  ou encore  $(\frac{4x_0 - 3y_0 + 5}{5}, \frac{-3x_0 - 4y_0 + 15}{5})$ .

(Remarque. Si on n'avait pas déjà  $p(M_0)$  on aurait cherché le symétrique sous la forme  $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$ ,  $\lambda$  étant entièrement déterminé par la condition : le milieu du segment  $[M_0, s(M_0)]$  appartient à  $(D)$ .)

### Correction de l'exercice 4 ▲

Puisque  $(ABDC)$  un parallélogramme,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ . Les coordonnées de  $D$  dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  sont donc  $(1, 1)$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

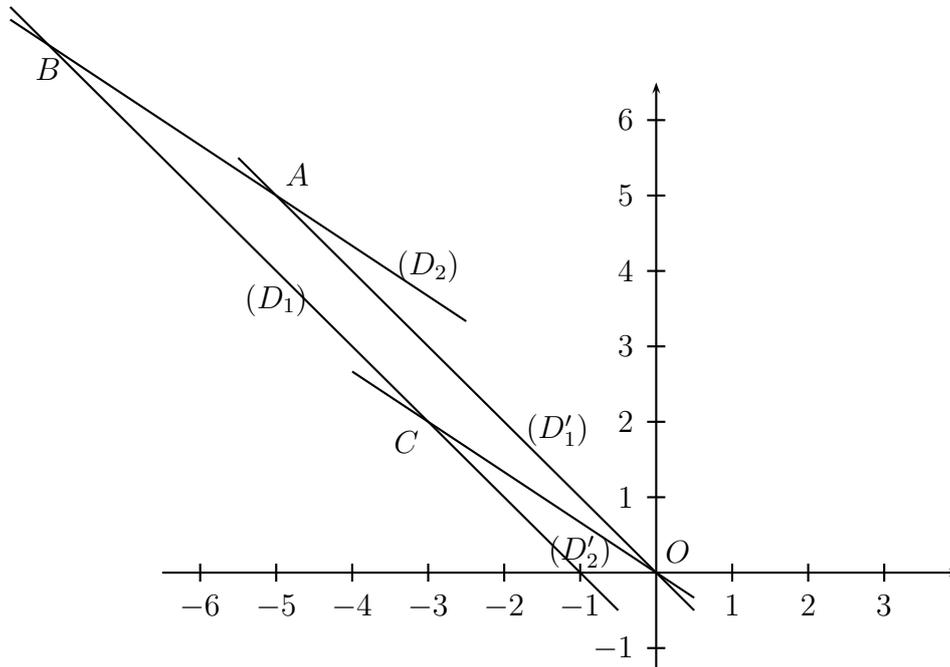
Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 &= 2x^2 + x(5y - 3) + 3y^2 - 2y - 5 = 2(x + \frac{1}{4}(5y - 3))^2 - \frac{1}{8}(5y - 3)^2 + 3y^2 - 2y - 5 \\ &= \frac{1}{8}(4x + 5y - 3)^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{14}{8}y - \frac{49}{8} \\ &= \frac{1}{8}[(4x + 5y - 3)^2 - (y^2 - 14y + 49)] = \frac{1}{8}[(4x + 5y - 3)^2 - (y - 7)^2] \\ &= \frac{1}{8}(4x + 4y + 4)(4x + 6y - 10) = (x + y + 1)(2x + 3y - 5) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1 = 0 \text{ ou } 2x + 3y - 5 = 0).$$

(E) est la réunion de la droite (D<sub>1</sub>) d'équation  $x + y + 1 = 0$  et de la droite (D<sub>2</sub>) d'équation  $2x + 3y - 5 = 0$ .



La parallèle à (D<sub>1</sub>) passant par O est la droite (D'<sub>1</sub>) d'équation  $x + y = 0$  et la parallèle à (D<sub>2</sub>) passant par O est la droite (D'<sub>2</sub>) d'équation  $2x + 3y = 0$ . Ces droites se coupent en les quatre points  $O(0, 0)$ ,  $A(-5, 5)$ ,  $B(-8, 7)$  et  $C(-3, 2)$ . L'aire de ce parallélogramme vaut  $|\det(\vec{OA}, \vec{OC})| = 5$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Notons (D<sub>1</sub>), (D<sub>2</sub>) et (D<sub>3</sub>) les droites d'équations respectives  $y = 2x + 1$ ,  $y = 2x + 7$  et  $y = -\frac{1}{2}x$ . Soit  $\mathcal{C}$  un cercle.

Les droites (D<sub>1</sub>) et (D<sub>2</sub>) sont parallèles. Donc,  $\mathcal{C}$  est un cercle tangent à (D<sub>1</sub>) et (D<sub>2</sub>) si et seulement si son centre est sur l'ensemble des points à égale distance de (D<sub>1</sub>) et (D<sub>2</sub>) à savoir la droite d'équation  $y = 2x + 4$  et son rayon est la moitié de la distance de (D<sub>1</sub>) à (D<sub>2</sub>), ou encore la moitié de la distance d'un point de (D<sub>1</sub>), par exemple (0, 1), à (D<sub>2</sub>). Cette distance vaut  $\frac{|2 \cdot 0 - 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ . Finalement,  $\mathcal{C}$  est un cercle tangent à (D<sub>1</sub>) et (D<sub>2</sub>) si et seulement si son centre  $\Omega$  a des coordonnées de la forme  $(a, 2a + 4)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , et son rayon vaut  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

Un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  est tangent à (D<sub>3</sub>) si et seulement si la distance de  $\Omega$  à (D<sub>3</sub>) est le rayon  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \text{ solution} &\Leftrightarrow d(\Omega, (D_3)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a + 2(2a + 4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a + 8| = 3 \\ &\Leftrightarrow 5a + 8 = 3 \text{ ou } 5a + 8 = -3 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = -\frac{11}{5} \end{aligned}$$

On trouve deux cercles solutions, le cercle  $\mathcal{C}_1$  de centre  $\Omega_1(-1, 2)$  et de rayon  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  et le cercle  $\mathcal{C}_2$  de centre  $\Omega_2(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$  et de rayon  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soient  $k$  et  $k'$  deux réels non nuls,  $\Omega$  et  $\Omega'$  deux points (pas nécessairement distincts), puis  $h$  (resp.  $h'$ ) l'homothétie de centre  $\Omega$  (resp.  $\Omega'$ ) et de rapport  $k$  (resp.  $k'$ ).  
Soient  $M$  un point du plan, puis  $M' = h(M)$  et  $M'' = h'(M')$ .

$$M'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' M'} = \Omega' + k' (\overrightarrow{\Omega' \Omega} + \overrightarrow{\Omega M'}) = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + k k' \overrightarrow{\Omega M} \quad (*)$$

Chechons alors les points invariants par  $h' \circ h$ .

$$\begin{aligned} h' \circ h(M) = M &\Leftrightarrow \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + k k' \overrightarrow{\Omega M} = M \Leftrightarrow -\overrightarrow{\Omega' M} + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + k k' \overrightarrow{\Omega M} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (k k' - 1) \overrightarrow{\Omega M} = (k' - 1) \overrightarrow{\Omega \Omega'} \quad (**) \end{aligned}$$

**1er cas.** Si  $k k' \neq 1$ ,  $(**) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k' - 1}{k k' - 1} \overrightarrow{\Omega \Omega'}$ , ce qui signifie que l'équation  $(**)$  a une et une seule solution que l'on note  $\Omega''$ , ou encore  $h' \circ h$  a un et un seul point invariant, le point  $\Omega''$  tel que  $\Omega'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + k k' \overrightarrow{\Omega \Omega''}$ .

Mais alors, l'égalité  $(*)$  s'écrit pour tout point  $M$

$$M'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + k k' \overrightarrow{\Omega M} = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + k k' \overrightarrow{\Omega \Omega''} + k k' \overrightarrow{\Omega'' M} = \Omega'' + k k' \overrightarrow{\Omega'' M}.$$

$h' \circ h$  est donc l'homothétie de rapport  $k k'$  et de centre  $\Omega''$ . On doit noter que le centre  $\Omega''$  est sur la droite  $(\Omega \Omega')$ .

Si  $k k' \neq 1$ ,  $h' \circ h$  est une homothétie de rapport  $k k'$ .

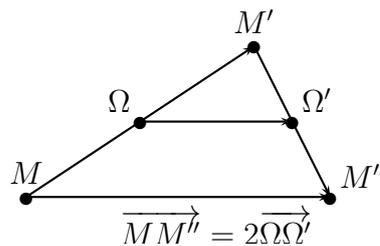
**2ème cas.** Si  $k k' = 1$ , l'égalité  $(*)$  s'écrit pour tout point  $M$ ,  $M'' = \Omega' + k' \overrightarrow{\Omega' \Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$  et donc

$$\overrightarrow{M M''} = \Omega' + k' (\Omega - \Omega') + (M - \Omega) - M = (1 - k') \overrightarrow{\Omega \Omega'}.$$

Dans ce cas,  $h' \circ h$  est la translation de vecteur  $(1 - k') \overrightarrow{\Omega \Omega'}$ .

En résumé, **la composée de deux homothéties de rapport respectifs  $k$  et  $k'$  tous deux non nuls est une homothétie de rapport  $k k'$  si  $k k' \neq 1$  et une translation si  $k k' = 1$**  (ce résultat est à connaître).

2. C'est un cas particulier de la question précédente. Une symétrie centrale est une homothétie de rapport  $-1$ . Puisque  $(-1)(-1) = 1$ ,  $s' \circ s$  est une translation. Son vecteur est  $\overrightarrow{\Omega s' \circ s(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega s'(\Omega)} = 2 \overrightarrow{\Omega \Omega'}$ .



**La composée de deux symétries centrales est une translation.**

3. Soit  $\Omega'$  le point tel que  $\vec{u} = 2 \overrightarrow{\Omega' \Omega}$ , c'est-à-dire  $\Omega' = \Omega - \frac{1}{2} \vec{u}$ . Soit  $s'$  la symétrie centrale de centre  $\Omega'$ . D'après 2),  $s \circ s'$  est la translation de vecteur  $2 \overrightarrow{\Omega' \Omega} = \vec{u}$ . Par suite,  $s \circ t = s \circ s \circ s' = s'$ .

**La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.**

### Correction de l'exercice 8 ▲

Pour  $1 \leq i \leq n$ , notons  $s_i$  la symétrie centrale de centre  $A_i$ . Le problème revient à trouver  $n$  points  $B_1, \dots, B_n$  tels que  $B_2 = s_1(B_1)$ ,  $B_3 = s_2(B_2), \dots, B_n = s_{n-1}(B_{n-1})$ ,  $B_1 = s_n(B_n)$ . Ceci équivaut à

$$\forall i \in \{2, \dots, n\}, B_i = s_{i-1} \circ s_{i-2} \circ \dots \circ s_1(B_1) \text{ et } B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1) \quad (*).$$

Posons alors  $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1$ .  $f$  est une composée de symétries centrales. Il y a donc deux cas. Si  $n$  est pair, on peut regrouper les symétries deux par deux.  $f$  est alors (d'après l'exercice 7) une composée de translations et donc  $f$  est une translation. Si  $n$  est impair,  $n - 1$  est pair et donc la composée des  $n - 1$  premières symétries est une translation. Par suite,  $f$  est la composée d'une translation et d'une symétrie centrale et est donc une symétrie centrale (d'après l'exercice 7).

Maintenant, (\*) a une solution si et seulement si  $f$  a un point invariant.

**1er cas.** Si  $n$  est impair,  $f$  étant une symétrie centrale,  $f$  a un et un seul point invariant : son centre. Il existe donc un et un seul point  $B_1$  vérifiant  $B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1)$  et finalement, un et un seul  $n$ -uplet  $(B_1, \dots, B_n)$  solution du problème posé.

**2ème cas.** Si  $n$  est pair,  $f$  est une translation. Si son vecteur est non nul,  $f$  n'a pas de point invariant et le problème n'a pas de solution. Si son vecteur est nul,  $f$  est l'identité et tout point est invariant par  $f$ .

Déterminons le vecteur de  $f$ . On pose  $n = 2p$ . On a alors

$$f = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \dots \circ s_2 \circ s_1 = t_{2A_{2p-1}A_{2p}} \circ \dots \circ t_{2A_1A_2} = t_{2(\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}})}.$$

Quand  $n = 2p$  est pair, le problème posé a des solutions si et seulement si  $\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \vec{0}$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Tout d'abord, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$  et  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $\Omega(1, -2)$  et de rayon 2.

- Le point  $A(2, -2 + \sqrt{3})$  est effectivement sur  $\mathcal{C}$  car  $(2 - 1)^2 + (-2 + \sqrt{3} + 2)^2 = 1 + 3 = 4$ . La tangente  $(T)$  en  $A$  à  $\mathcal{C}$  est la droite passant par  $A$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{A\Omega}$ .

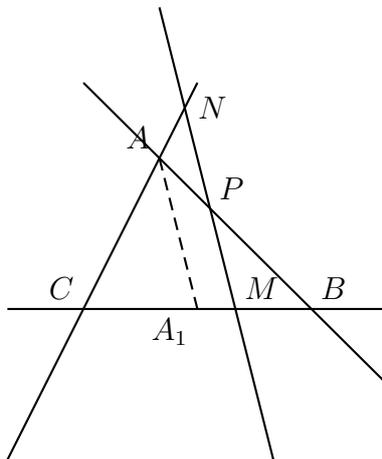
$$M(x, y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow (x - 2) + \sqrt{3}(y + 2 - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 5 + 2\sqrt{3} = 0.$$

- Soit  $\mathcal{C}'$  le cercle de centre  $(1, 0)$  et de rayon 2. Une équation de ce cercle est  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ . Par suite,

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4 = 0 & ((1) - (2)) \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Il ya donc deux points d'intersection :  $(1 + \sqrt{3}, -1)$  et  $(1 - \sqrt{3}, -1)$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲



Montrons tout d'abord que si  $M, N$  et  $P$  sont alignés, alors  $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$  (\*).

On suppose donc que  $M, N$  et  $P$  sont alignés et on note  $(\Delta)$  la droite contenant  $M, N$  et  $P$ .

**1ère solution.** Soit  $A_1$  le projeté de  $A$  sur la droite  $(BC)$  parallèlement à la droite  $(\Delta)$ . D'après le théorème de THALES, on a

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}} \text{ et } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}},$$

et donc,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}} \cdot \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}} = 1.$$

**2ème solution.** Soit  $h_1$  l'homothétie de centre  $M$  et de rapport  $k_1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ , de sorte que  $h_1(C) = B$ . Soit  $h_2$  l'homothétie de centre  $N$  et de rapport  $k_2 = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$ , de sorte que  $h_2(A) = C$ .

Maintenant, le produit  $k_1 k_2$  peut-il être égal à 1 ? Si c'était le cas, on aurait  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$  et donc,  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ . La réciproque du théorème de THALES permettrait alors d'affirmer que  $(MN)$  et  $(AB)$  sont parallèles, ce qui n'est pas. Donc,  $k_1 k_2 \neq 1$  et d'après l'exercice 7,  $h_1 \circ h_2$  est une homothétie. Puisque  $h_1 \circ h_2$  transforme  $A$  en  $B$ , son centre est sur la droite  $(AB)$ . Mais d'autre part, son centre est sur la droite des centres  $(MN)$ . Finalement, le centre de  $h_1 \circ h_2$  est le point d'intersection de  $(MN)$  et  $(AB)$ , c'est-à-dire le point  $P$ .

Mais alors, le rapport de  $h_1 \circ h_2$  vaut également  $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ . Ainsi,  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$  et finalement,  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ .

**3ème solution.** On se place dans le repère  $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont :  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(0,1)$ ,  $M(m, 1-m)$ ,  $N(0,n)$  et  $P(p,0)$  où  $m, n$  et  $p$  sont distincts de 0 et de 1. Les coordonnées de  $\overrightarrow{MB}$  sont  $(1-m, m-1)$  et celles de  $\overrightarrow{MC}$  sont  $(-m, m)$ . Par suite,  $m\overrightarrow{MB} = (m-1)\overrightarrow{MC}$  et finalement,  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{m-1}{m}$ . On trouve de même  $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{n-1}{n}$  et  $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{p}{p-1}$ . Finalement,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} M, N \text{ et } P \text{ alignés} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & p-m \\ m+n-1 & m-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -m(m-1) - (p-m)(m+n-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -pm - pn + p + mn = 0 \Leftrightarrow mn = p(m+n-1) \Leftrightarrow mn \\ &= -p(m-1)(n-1) + pmn \Leftrightarrow p(m-1)(n-1) = mn(p-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)} = 1 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que si  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ , alors les points  $M, N$  et  $P$  sont alignés. Pour cela, vérifions tout d'abord que  $(MN)$  n'est pas parallèle à  $(AB)$ . Dans le cas contraire, le théorème de THALES fournirait  $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$  et donc  $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ , puis  $\overline{PA} = \overline{PB}$  et finalement  $\overline{AB} = 0$ , ce qui n'est pas.

Par suite, la droite  $(MN)$  coupe la droite  $(AB)$  en un point  $P_1$  vérifiant d'après le début de l'exercice

$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = 1$ . On en déduit que  $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ . Notons  $k$  la valeur commune de ce rapport.

On a déjà que  $k \neq 1$ , ou encore  $1-k \neq 0$ . Par suite,  $P_1 = \text{bar}\{A(1), B(-k)\} = P$ , ce qui montre que les points  $M, N$  et  $P$  sont alignés.

### Correction de l'exercice 11 ▲

Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble cherché.

Tout d'abord, pour tout réel  $\theta$ ,  $1 + \sin(2\theta) \geq 0$ ,  $1 - \sin(2\theta) \geq 0$  puis  $\sqrt{1 + \sin(2\theta)} + \sqrt{1 - \sin(2\theta)} > 0$ , car  $\sin(2\theta)$  ne peut valoir simultanément 1 et  $-1$ . La fonction  $r \mapsto r(\theta)$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ , clairement  $2\pi$ -périodique.

Ainsi,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta + 2\pi] = M(\theta).$$

On obtient donc l'ensemble complet quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $2\pi$  comme  $[-\pi, \pi]$  par exemple. La fonction  $r \mapsto r(\theta)$  est plus paire. Par suite,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à  $\theta \in [0, \pi]$  et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$ .

Pour  $\theta \in [0, \pi]$ , on a clairement  $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ . Par suite,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe  $(Oy)$  puis par symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$ .

Pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a clairement  $r(\frac{\pi}{2} - \theta) = r(\theta)$ . Par suite, en notant  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$ ,

$$M(\frac{\pi}{2} - \theta) = [r(\frac{\pi}{2} - \theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = s_{(\Delta)}(M(\theta)).$$

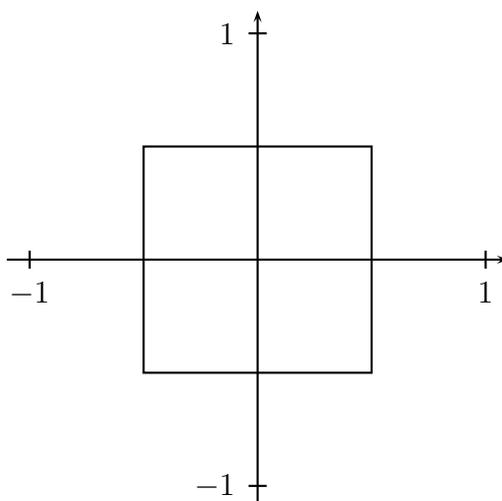
On construit l'ensemble des points correspondant à  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta)$  puis par symétrie orthogonale d'axe  $(Oy)$  et enfin par symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$ . Maintenant, pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin(2\theta)} + \sqrt{1 - \sin(2\theta)}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)} + \sqrt{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta)} + \sqrt{2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)} \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \theta))} = \frac{1}{2\cos\theta}. \end{aligned}$$

En notant  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point  $M$ , on a alors

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\cos\theta} \Leftrightarrow r\cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

D'où le graphique :



### Correction de l'exercice 12 ▲

Il revient au même de démontrer que, si le plan est rapporté à un repère orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points deux à deux distincts, non alignés et à coordonnées entières. On sait que  $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}$  et  $\sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\det(\vec{AB}, \vec{AC})}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}$ .

Par suite, ou bien le triangle  $(ABC)$  est rectangle en  $A$  (et n'est donc pas équilatéral), ou bien  $\tan(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\det(\vec{AB}, \vec{AC})}{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}$ . Dans ce dernier cas,  $\tan(\vec{AB}, \vec{AC})$  est un quotient de deux nombres entières, et est donc un rationnel. Malheureusement, pour un triangle équilatéral, la tangente de chacun de ses angles vaut  $\sqrt{3}$  qui n'est pas un rationnel.

Quand le repère est orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

### Correction de l'exercice 13 ▲

Soit  $f$  la transformation considérée.

1.  $f$  est la translation de vecteur  $\vec{u}(3, -1)$ .
2.  $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$ .  $f$  est l'homothétie de rapport 2 et de centre  $\Omega(-3, 0)$ .
3.  $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1 + i)$ . Comme  $i = e^{i\pi/2}$ ,  $f$  est la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre  $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
4.  $\omega = (1 - i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$ . Comme  $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ ,  $f$  est la similitude de centre  $\Omega(1, -2)$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .

### Correction de l'exercice 14 ▲

1. Le fait que  $(D)$  et  $(D')$  soient sécantes équivaut à  $ab' - a'b \neq 0$ .

Soit  $A(x_A, y_A)$  le point d'intersection de  $(D)$  et  $(D')$ .

Si  $(\Delta)$  est une droite ayant une équation de la forme  $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  alors, puisque

$$\lambda(ax_A + by_A + c) + \mu(a'x_A + b'y_A + c') = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

le point  $A$  appartient à  $(\Delta)$ .

Réciproquement, soit  $(\Delta)$  une droite d'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ,  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . Soit  $\vec{v}$  le vecteur de coordonnées  $(\alpha, \beta)$ . Puisque  $ab' - a'b \neq 0$ , les deux vecteurs  $\vec{u}(a, b)$  et  $\vec{u}'(a', b')$  ne sont pas colinéaires. Mais alors, la famille  $(\vec{u}, \vec{u}')$  est une base du plan (vectoriel). Par suite, il existe  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  (car  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ) tel que  $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}'$ , ou encore tel que  $\alpha = \lambda a + \mu a'$  et  $\beta = \lambda b + \mu b'$ . Toute droite  $(\Delta)$  admet donc une équation cartésienne de la forme  $\lambda(ax + by) + \mu(a'x + b'y) + \gamma = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ .

Maintenant, si  $A \in (\Delta)$ , alors

$$\gamma = -\lambda(ax_A + by_A) + \mu(a'x_A + b'y_A) = -\lambda(-c) - \mu(-c') = \lambda c + \mu c'.$$

Finalement, si  $A \in (\Delta)$ ,  $(\Delta)$  admet une équation de la forme  $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ .

2. Les deux droites  $(D)$  et  $(D')$  considérées sont bien sécantes car  $5 \cdot 2 - 7(-3) = 31 \neq 0$ . Notons  $A$  leur point d'intersection et  $B$  le point de coordonnées  $(1, 0)$ .  $B$  n'est sur aucune des deux droites considérées de sorte qu'il existe une et seule droite, notée  $(\Delta)$ , solution du problème posé.

Puisque  $(\Delta)$  passe par  $A$ ,  $(\Delta)$  a une équation de la forme  $\lambda(5x + 7y + 1) + \mu(-3x + 2y + 1) = 0$ . Il est clair que l'on ne peut avoir  $\lambda = 0$  (car  $(\Delta)$  n'est pas  $(D')$ ) et après division par  $\lambda$ , l'équation s'écrit sous la forme  $(5x + 7y + 1) + k(-3x + 2y + 1) = 0$  où  $k$  est un réel. Maintenant,  $(\Delta)$  passe par  $B$  si et seulement si  $6 - 2k = 0$  ou encore  $k = 3$ .

Une équation cartésienne de  $(\Delta)$  est donc  $(5x + 7y + 1) + 3(-3x + 2y + 1) = 0$  ou encore  $-4x + 13y + 4 = 0$ .

3. Soit  $M(x, y)$  un point du plan.

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{R}, M \in (D_m) &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, (2m-1)x + (m+1)y - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, m(2x+y-4) - x+y-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ -x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=2 \end{aligned}$$

Toutes les droites  $(D_m)$  passent par le point  $A(1, 2)$ .

La droite  $(D_{-1})$  passe par  $A$  et est parallèle à  $(Oy)$ . Ensuite, pour  $m \neq -1$ ,  $(D_m)$  est la droite passant par  $A$  et de coefficient directeur  $f(m) = \frac{-2m+1}{m+1} = -2 + \frac{3}{m+1}$ . Quand  $m$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f(m)$  prend toutes les valeurs réelles sauf  $-2$ .

La droite passant par  $A$  de coefficient directeur  $-2$  (et donc d'équation  $y = -2x + 4$ ) n'est pas une droite  $(D_m)$ . Toute autre droite passant par  $A$  est une droite  $(D_m)$ .

---