



## Courbes en polaires

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1

---

Construire les courbes suivantes :

1.  $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ ,
2.  $r = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$ ,
3.  $r = ae^{b\theta}$ ,  $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$ ,
4.  $r = 2\cos(2\theta) + 1$ ,
5.  $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$ .

[Correction ▼](#)

[005530]

### Exercice 2

---

Etude complète de la courbe d'équation polaire  $r = \frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$ .

[Correction ▼](#)

[005531]

### Exercice 3 La cardioïde

---

Soit la courbe d'équation polaire  $r = a(1 + \cos\theta)$ ,  $a > 0$ .

1. Construire la courbe.
2. Longueur et développée.

[Correction ▼](#)

[005532]

### Exercice 4

---

Construire la courbe d'équation cartésienne  $x^2(x^2 + y^2) - (y - x)^2 = 0$  après être passé en polaires .

[Correction ▼](#)

[005533]

### Exercice 5

---

Développée de la spirale logarithmique d'équation polaire  $r = ae^\theta$  ( $a > 0$ ).

[Correction ▼](#)

[005534]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. (**Lemniscate de BERNOULLI.**) Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation polaire  $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ . **Domaine d'étude.** Notons  $D$  le domaine de définition de la fonction  $r : \theta \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$ . •  $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$  et pour  $\theta \in D$ ,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $2\pi$  comme  $[-\pi, \pi]$ . •  $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$  et pour  $\theta \in D$ ,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, \pi]$  puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Ox)$ . •  $\theta \in D \Leftrightarrow \pi - \theta \in D$  et pour  $\theta \in D$ ,

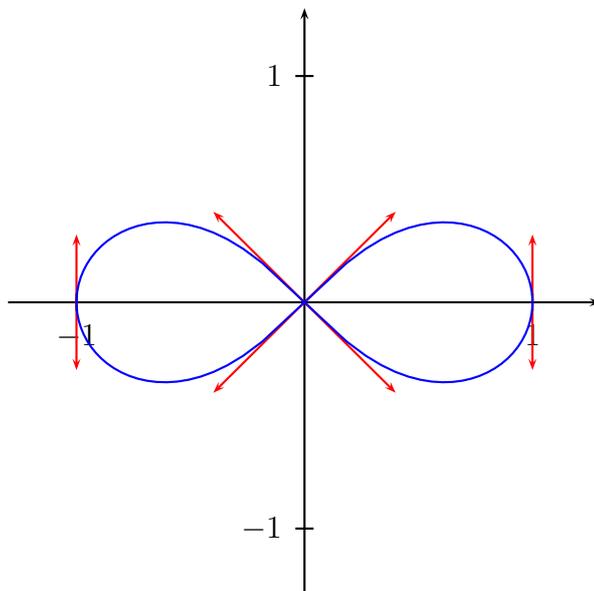
$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Oy)$  puis d'axe  $(Ox)$ . Pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\theta \in D \Leftrightarrow \cos(2\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ . On étudie donc la courbe sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . **Variations et signe de  $r$ .** La fonction  $r$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ , strictement positive sur  $]0, \frac{\pi}{4}[$  et s'annule en  $\frac{\pi}{4}$ . **Etude en  $\frac{\pi}{4}$ .**  $M(\frac{\pi}{4}) = O$  et donc la tangente en  $M(\frac{\pi}{4})$  est la droite passant par  $O$  et d'angle polaire  $\frac{\pi}{4}$  ou encore la droite d'équation  $y = x$ .

**Etude en 0.**  $M(0)$  est le point de coordonnées cartésiennes  $(1, 0)$ . Pour  $\theta \in ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ ,

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \vec{u}_\theta + \sqrt{\cos(2\theta)} \vec{v}_\theta \text{ et donc } \frac{d\vec{M}}{d\theta}(0) = \vec{v}_0 = \vec{j}.$$

$M(0)$  est le point de coordonnées cartésiennes  $(1, 0)$  et la tangente en  $M(0)$  est dirigée par  $\vec{j}$



2. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation polaire  $r = \sin(\frac{2\theta}{3})$ . **Domaine d'étude.** • Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$M(\theta + 6\pi) = [r(\theta + 6\pi), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $6\pi$  comme  $[-3\pi, 3\pi]$ .

• Pour  $\theta \in [-3\pi, 3\pi]$ ,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [-r(\theta), -\theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

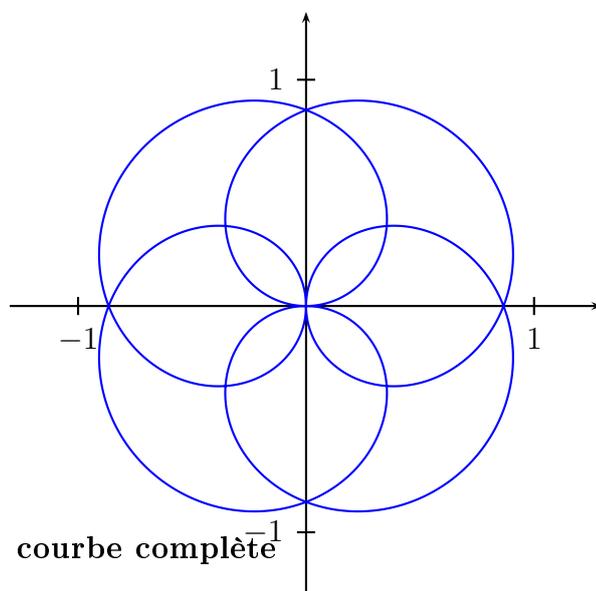
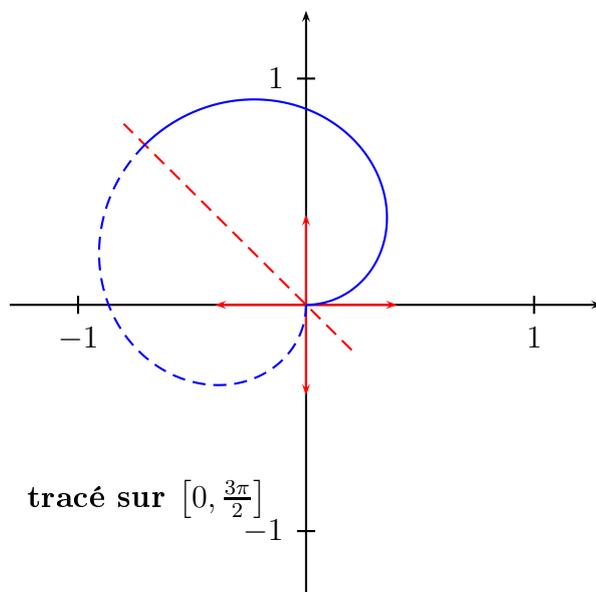
On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, 3\pi]$  puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Oy)$ . • Pour  $\theta \in [0, 3\pi]$ ,  $M(3\pi - \theta) = [r(3\pi - \theta), 3\pi - \theta] = [-r(\theta), 3\pi - \theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta))$ . On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$  puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Ox)$  puis d'axe  $(Oy)$ .

• Pour  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $M(\frac{3\pi}{2} - \theta) = [r(\frac{3\pi}{2} - \theta), \frac{3\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta] = s_{y=-x}(M(\theta))$ . On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$  puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axes la droite d'équation  $y = -x$ , puis d'axe  $(Ox)$  et enfin d'axe  $(Oy)$ .

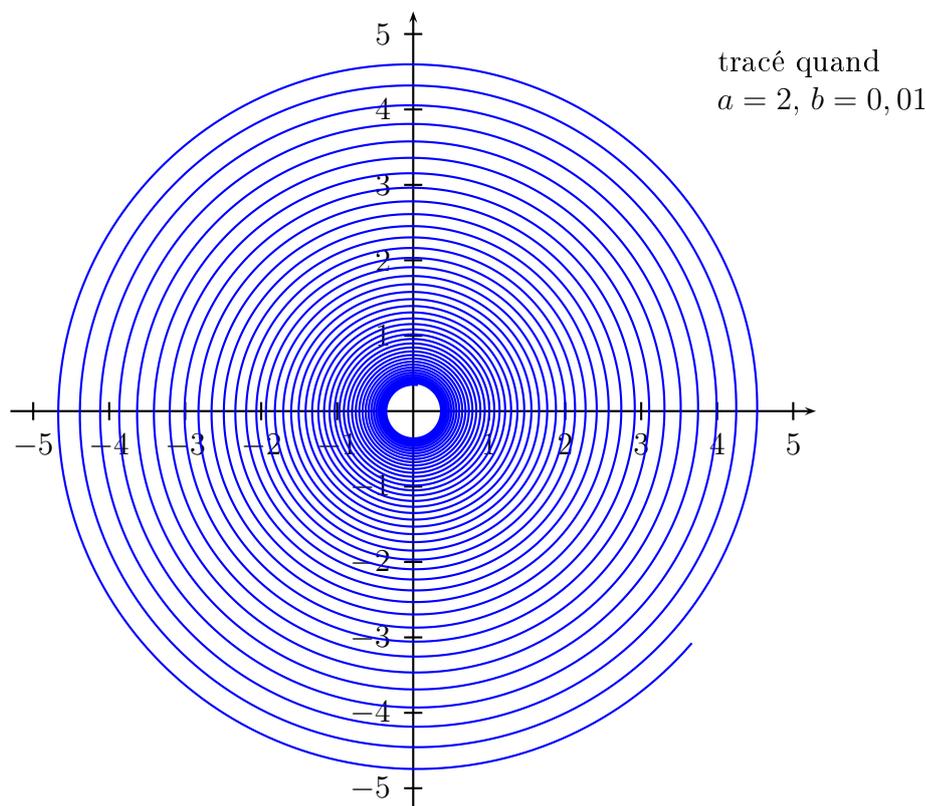
• **Remarque.** La fonction  $r$  admet  $3\pi$  pour plus petite période strictement positive. Pourtant, on n'obtient pas la courbe complète quand  $\theta$  décrit  $[0, 3\pi]$  car  $3\pi$  ne fournit pas un nombre entier de tours. Plus précisément,

$$M(\theta + 3\pi) = [r(\theta + 3\pi), \theta + 3\pi] = [r(\theta), \theta + \pi] = s_O(M(\theta)).$$

**Variations et signe de  $r$ .** La fonction  $r$  est strictement positive sur  $]0, \frac{3\pi}{4}]$  et s'annule en 0. La fonction  $r$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{3\pi}{4}]$ . •  $M(0)$  est le point  $O$ . La tangente en  $M(0)$  est la droite passant par  $O$  d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe  $(Ox)$ .

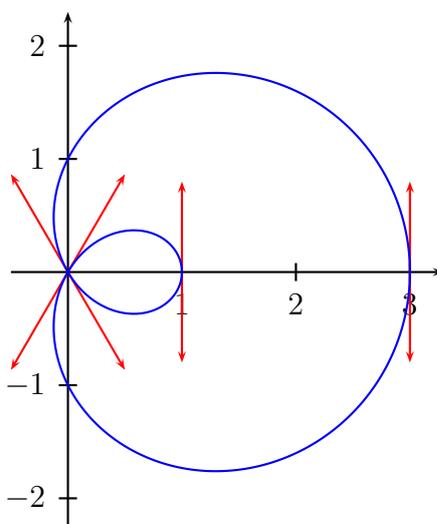


3. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation polaire  $r = ae^{b\theta}$ . L'étude est très brève. La fonction  $r : \theta \mapsto ae^{b\theta}$  est strictement positive et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Tout en tournant, on ne cesse de s'écarter de l'origine : la courbe est une spirale.



4. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation polaire  $r = 2 \cos(\theta) + 1$ .

**Domaine d'étude.** • Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$ . On obtient donc la courbe complète quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $2\pi$  comme  $[-\pi, \pi]$ . • Pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$ . On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, \pi]$  puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Ox)$ . **Variations et signe de  $r$ .** La fonction  $r$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ . La fonction  $r$  est strictement positive sur  $[0, \frac{2\pi}{3}[$ , strictement négative sur  $]\frac{2\pi}{3}, \pi]$  et s'annule en  $\frac{2\pi}{3}$ . Donc la fonction  $\theta \mapsto OM(\theta) = |r(\theta)|$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{2\pi}{3}]$  et strictement croissante sur  $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ . •  $M(\frac{2\pi}{3})$  est le point  $O$ . La tangente en  $M(\frac{2\pi}{3})$  est la droite passant par  $O$  d'angle polaire  $\frac{2\pi}{3}$  c'est-à-dire la droite d'équation  $y = -\sqrt{3}x$ . • Par symétrie par rapport à  $(Ox)$ , les tangentes en  $M(0)$  et  $M(\pi)$  sont parallèles à  $(Oy)$ .



5. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation polaire  $r = \tan(\frac{2\theta}{3})$ . **Domaine d'étude.** Notons  $D$  le domaine de définition de la fonction  $r : \theta \mapsto \tan(\frac{2\theta}{3})$ . •  $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 6\pi \in D$  et  $M(\theta + 6\pi) = M(\theta)$ . On obtient donc la courbe complète quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $6\pi$  comme  $[-3\pi, 3\pi]$ . •  $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$  et

$M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$ . On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, 3\pi]$  puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Oy)$ . •  $\theta \in D \Leftrightarrow 3\pi - \theta \in D$  et  $M(3\pi - \theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$ . On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$  puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Ox)$  puis par réflexion d'axe  $(Oy)$ . •  $\theta \in D \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \theta \in D$  et

$$M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = [-r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$  puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe la droite d'équation  $y = x$ , puis d'axe  $(Ox)$  et enfin d'axe  $(Oy)$ . • Pour  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ ,  $r(\theta)$  existe si et seulement si  $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$ . On étudie donc sur  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}[$ .

**Variations et signe de  $r$ .** La fonction  $r$  est strictement croissante sur  $]0, \frac{3\pi}{4}[$ , strictement positive sur  $]0, \frac{3\pi}{4}[$  et s'annule en 0.

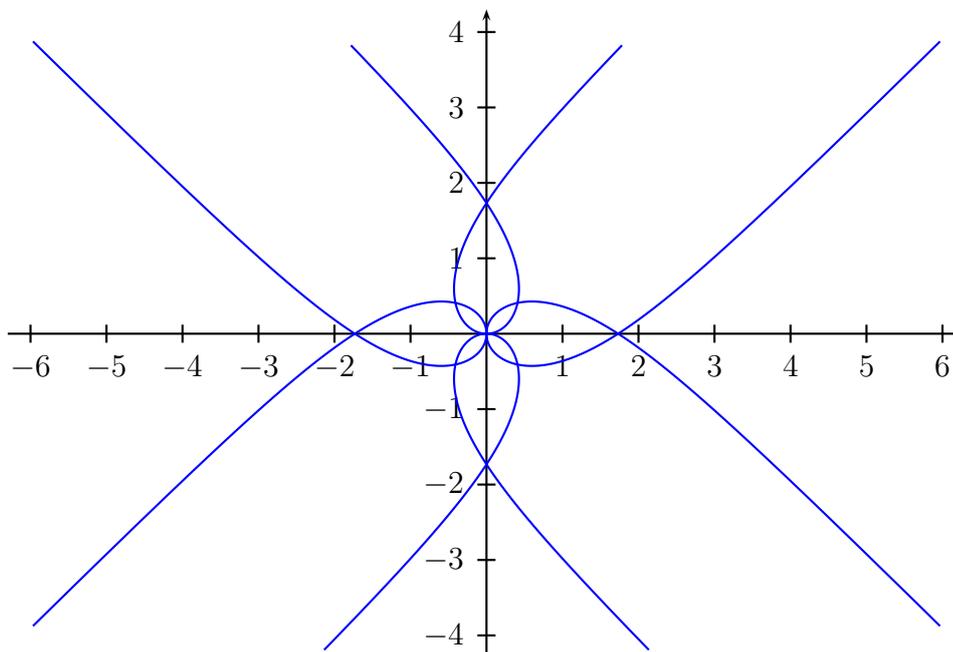
• La tangente en  $M(0) = O$  est la droite passant par  $O$  et d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe  $(Ox)$ . • **Etude quand  $\theta$  tend vers  $\frac{3\pi}{4}$ .** Quand  $\theta$  tend vers  $\frac{3\pi}{4}$  par valeurs inférieures,  $r(\theta)$  tend vers  $+\infty$ . la courbe admet donc une direction asymptotique d'angle polaire  $\frac{3\pi}{4}$  ou encore d'équation  $y = -x$ . Recherchons une éventuelle droite asymptote. Pour cela, étudions  $\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4} \\ \theta < \frac{3\pi}{4}}} r(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)$ . Posons  $h = \frac{3\pi}{4} - \theta$  ou

encore  $\theta = \frac{3\pi}{4} - h$ .

$$r(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2h}{3}\right) \sin(-h) = -\cotan h \sin h = -\cosh \rightarrow -1.$$

Ainsi,  $\mathcal{C}$  admet une droite asymptote  $(D)$  quand  $\theta$  tend vers  $\frac{3\pi}{4}$ . De plus,

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}_{\frac{3\pi}{4}} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = -1 \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$



### Correction de l'exercice 2 ▲

**Domaine d'étude.** Notons  $D$  le domaine de définition de la fonction  $r : \theta \mapsto \frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$ .  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$  et  $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$ . On obtient donc la courbe complète quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $2\pi$  comme  $[-\pi, \pi]$ . Pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $2\sin\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ . On étudie donc la courbe sur  $[-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ . **Signe de  $r$ .**

$\theta$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$2 \cos \theta + 1$	-	-	0	+	+	0
$2 \sin \theta + 1$	+	0	-	-	0	+
signe de $r$	-		+	0	-	
					+	0
						-

**Variations de  $r$ .** La fonction  $r$  est dérivable sur  $[-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$  et pour  $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$

$$r'(\theta) = \frac{-2 \sin \theta (2 \sin \theta + 1) - 2 \cos \theta (2 \cos \theta + 1)}{(2 \sin \theta + 1)^2} = \frac{-4 - 2 \cos \theta - 2 \sin \theta}{(2 \sin \theta + 1)^2} = \frac{-4 - 2\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})}{(2 \sin \theta + 1)^2} < 0.$$

La fonction  $r$  est strictement décroissante sur  $[-\pi, -\frac{5\pi}{6}[$ , sur  $]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}[$  et sur  $]-\frac{\pi}{6}, \pi]$ . **Etude quand  $\theta$  tend vers  $-\frac{5\pi}{6}$ .**  $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{5\pi}{6}} r(\theta) = -\infty$  et  $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{5\pi}{6}} r(\theta) = +\infty$ . Donc la courbe  $\mathcal{C}$  admet une direction asymptotique d'angle polaire  $-\frac{5\pi}{6}$  ou encore d'équation  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ . Etudions maintenant l'existence d'une éventuelle droite asymptote et pour cela étudions  $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{5\pi}{6}} r(\theta) \sin(\theta + \frac{5\pi}{6})$ . On pose  $h = \theta + \frac{5\pi}{6}$  ou encore  $\theta = -\frac{5\pi}{6} + h$  de sorte que  $\theta$  tend vers  $-\frac{5\pi}{6}$  si et seulement si  $h$  tend vers 0. Quand  $h$  tend vers 0

$$r(\theta) \sin\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2 \cos\left(-\frac{5\pi}{6} + h\right) + 1}{2 \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + h\right) + 1} \sin h = \frac{(1 - \sqrt{3} \cosh h) + \sin h}{-\sqrt{3} \sinh h + (1 - \cosh h)} \sin h \sim \frac{1 - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}h} \times h = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite,  $\mathcal{C}$  admet une droite asymptote  $(D_1)$  quand  $\theta$  tend vers  $-\frac{5\pi}{6}$ . De plus

$$M(x, y) \in (D_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}_{-\frac{5\pi}{6}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

**Etude quand  $\theta$  tend vers  $-\frac{\pi}{6}$ .**  $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} r(\theta) = -\infty$  et  $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} r(\theta) = +\infty$ . Donc la courbe  $\mathcal{C}$  admet une direction asymptotique d'angle polaire  $-\frac{\pi}{6}$  ou encore d'équation  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ . On pose ensuite  $h = \theta + \frac{\pi}{6}$ . Quand  $h$  tend vers 0

$$r(\theta) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 \cos\left(-\frac{\pi}{6} + h\right) + 1}{2 \sin\left(-\frac{\pi}{6} + h\right) + 1} \sin h = \frac{(1 + \sqrt{3} \cosh h) + \sin h}{\sqrt{3} \sinh h + (1 - \cosh h)} \sin h \sim \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}h} \times h = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite,  $\mathcal{C}$  admet une droite asymptote  $(D_2)$  quand  $\theta$  tend vers  $-\frac{\pi}{6}$ . De plus

$$M(x, y) \in (D_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}_{-\frac{\pi}{6}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

**Tableau de variation de  $r$ .**

$\theta$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$r'(\theta)$	-		-		-	
$r$	-1		$+\infty$		$+\infty$	-1
			$\searrow$		$\searrow$	
			$-\infty$		$-\infty$	

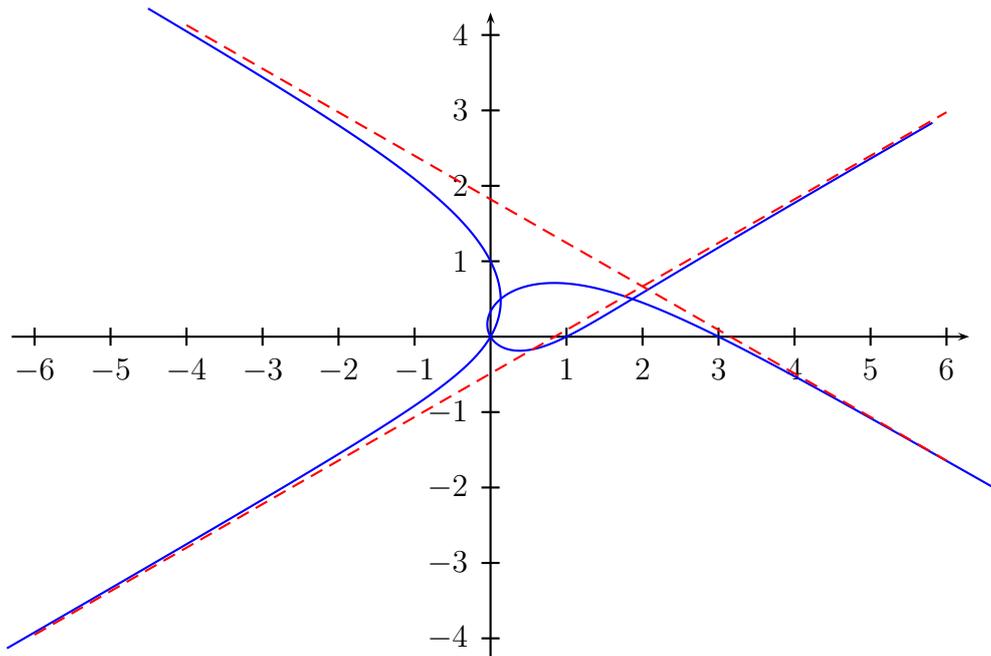
**Recherche des points multiples.** Soit  $(\theta_1, \theta_2) \in ([-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\})^2$  tel que  $\theta_1 < \theta_2$ . On suppose de plus que  $\theta_1 \notin \{\pm\frac{2\pi}{3}\}$  et  $\theta_1 \notin \{\pm\frac{2\pi}{3}\}$  de sorte que  $M(\theta_1) \neq O$  et  $M(\theta_2) \neq O$ .

$$\begin{aligned} M(\theta_1) = M(\theta_2) &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \text{ et } r(\theta_2) = r(\theta_1)) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / \theta_2 = \theta_1 + \pi + 2k\pi \text{ et } r(\theta_2) = -r(\theta_1)) \\ &\Leftrightarrow \theta_1 \in [-\pi, 0], \theta_2 = \theta_1 + \pi \text{ et } r(\theta_2) = -r(\theta_1) \\ &\Leftrightarrow \theta_1 \in [-\pi, 0], \theta_2 = \theta_1 + \pi \text{ et } \frac{-2 \cos(\theta_1) + 1}{-2 \sin(\theta_1) + 1} = -\frac{2 \cos(\theta_1) + 1}{2 \sin(\theta_1) + 1}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $\theta \in [-\pi, 0] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\}$

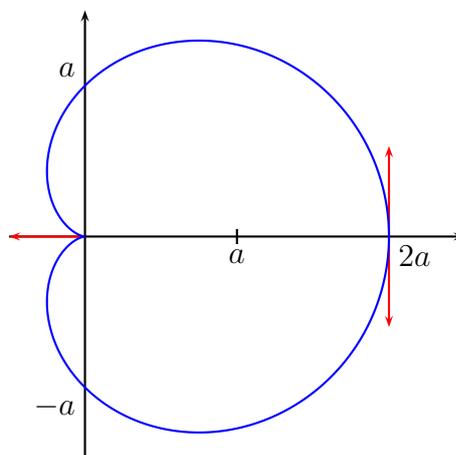
$$\begin{aligned} \frac{-2\cos(\theta)+1}{-2\sin(\theta)+1} = -\frac{2\cos(\theta)+1}{2\sin(\theta)+1} &\Leftrightarrow -4\cos(\theta)\sin(\theta)+1 = 4\cos(\theta)\sin(\theta)-1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\theta \in \frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 2\theta \in \frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } \theta \in \frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta \in \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, les points doubles distincts de l'origine sont  $M(-\frac{11\pi}{12}) = M(\frac{\pi}{12})$  et  $M(-\frac{7\pi}{12}) = M(\frac{5\pi}{12})$ . Sinon,  $M(-\frac{2\pi}{3}) = M(\frac{2\pi}{3}) = O$ .



### Correction de l'exercice 3 ▲

1. **Domaine d'étude.** La fonction  $r$  est  $2\pi$ -périodique et paire. Donc on étudie et on construit la courbe quand  $\theta$  décrit  $[0, \pi]$  et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe  $(Ox)$ . **Variations et signe de  $r$ .** La fonction  $r$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ , strictement positive sur  $]0, \pi]$  et s'annule en  $\pi$ . **Etude pour  $\theta = \pi$ .** La tangente en  $M(\pi) = O$  est la droite passant par  $O$  d'angle polaire  $\pi$  c'est-à-dire l'axe  $(Ox)$ . Par symétrie par rapport à  $(Ox)$ , le point  $M(\pi)$  est un point de rebroussement de première espèce.



2. Soient  $\theta \in [-\pi, \pi]$  puis  $M = O + a(1 + \cos \theta) \vec{u}_\theta$  le point de  $\mathcal{C}$  de paramètre  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{d\theta} &= -a \sin \theta \vec{u}_\theta + a(1 + \cos \theta) \vec{v}_\theta = 2a \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left( -\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \vec{u}_\theta + \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \vec{v}_\theta \right) \\ &= 2a \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_\theta + \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \vec{v}_\theta \right) = 2a \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \vec{u}_{\frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

**Longueur  $\ell$  de la cardioïde.** On a  $\left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| = |2a \cos(\frac{\theta}{2})| = 2a \cos(\frac{\theta}{2})$  (pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ) et donc

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| d\theta = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta = 4a [\sin(\theta/2)]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

La cardioïde d'équation polaire  $r = a(1 + \cos \theta)$ ,  $a > 0$ , a pour longueur  $8a$ .

**Développée.** Le point  $M(\theta)$  est régulier si et seulement si  $\theta \neq \pm\pi$ . Dans ce cas,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| = 2a \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{ et aussi } \vec{\tau}(\theta) = \vec{u}_{\frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}$$

En notant  $\alpha(\theta)$  une mesure de l'angle  $(\vec{i}, \vec{\tau}(\theta))$ , on peut prendre  $\alpha(\theta) = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ . En notant  $R(\theta)$  le rayon de courbure au point  $M(\theta)$ ,

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{4}{3}a \cos \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

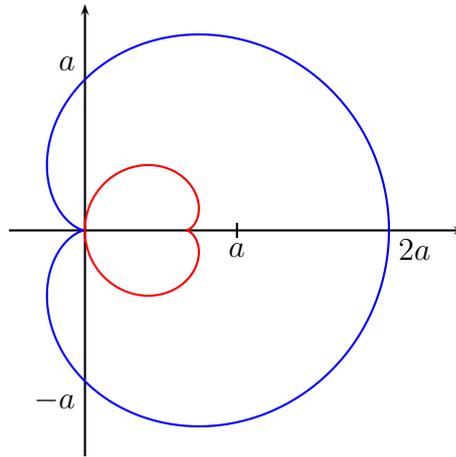
Ensuite,  $\vec{n}(\theta) = r_{\pi/2}(\vec{\tau}(\theta)) = -\vec{u}_{3\theta/2}$  et donc, en notant  $\Omega(\theta)$  le centre de courbure au point  $M(\theta)$ ,

$$\begin{aligned} \Omega(\theta) &= M(\theta) + R(\theta) \vec{n}(\theta) \\ &= O + a(1 + \cos \theta) \vec{u}_\theta - \frac{4}{3}a \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \vec{u}_{3\theta/2} \\ &= O + a(1 + \cos \theta) \left( \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \right) - \frac{4}{3}a \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{3\theta}{2} \right) \vec{i} + \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \vec{j} \right) \\ &= O + a \left[ \left( \cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \frac{2}{3}(\cos(\theta) + \cos(2\theta)) \right) \vec{i} + \left( \sin(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{2}{3}(\sin(\theta) + \sin(2\theta)) \right) \vec{j} \right] \\ &= O + a \left[ \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{3} \cos^2(\theta) \right) \vec{i} + \left( \frac{1}{3} \sin(\theta) - \frac{1}{3} \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \vec{j} \right] \\ &= O + \frac{2a}{3} \vec{i} + \frac{a}{3} (1 - \cos \theta) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Notons  $\Gamma$  la développée cherchée. On a  $\Gamma = t \circ h(\mathcal{C}_1)$  où  $t$  est la translation de vecteur  $\frac{2a}{3} \vec{i}$ ,  $h$  est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{3}$  et  $\mathcal{C}_1$  la courbe d'équation polaire  $r = a(1 - \cos \theta)$ . Maintenant, en notant  $r$  la fonction  $\theta \mapsto a(1 + \cos \theta)$  et  $r_1$  la fonction  $\theta \mapsto a(1 - \cos \theta)$ ,

$$[r_1(\theta + \pi), \theta + \pi] = [a(1 - \cos(\theta + \pi)), \theta + \pi] = s_O([r(\theta), \theta]).$$

La courbe  $\mathcal{C}_1$  est donc la symétrique par rapport à  $O$  de la courbe  $\mathcal{C}$ . En résumé, la développée de  $\mathcal{C}$  est l'image de  $\mathcal{C}$  par la transformation  $t \circ h \circ s_O$  : c'est encore une cardioïde.



### Correction de l'exercice 4 ▲

Soient  $(R, \theta) \in \mathbb{R}^2$  puis  $M$  le point du plan dont un couple de coordonnées polaires est  $[r, \theta]$ .

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2(x^2 + y^2) - (y - x)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \theta \times r^2 - (r \sin \theta - r \cos \theta)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow r^2 [r^2 \cos^2 \theta - (\sin \theta - \cos \theta)^2] = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r^2 = \left( \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta} \right)^2 \text{ (} \cos \theta = 0 \text{ ne fournit pas de solution)} \\
 &\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = \tan \theta - 1 \text{ ou } r = 1 - \tan \theta.
 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$  est donc la réunion de la courbe  $(\mathcal{C}_1)$  d'équation polaire  $r = \tan \theta - 1$ ,  $(\mathcal{C}_2)$  d'équation polaire  $r = 1 - \tan \theta$  et  $\{O\}$ . On note que le point  $O$  appartient à  $(\mathcal{C}_1)$  car  $\theta = \frac{\pi}{4}$  fournit  $r = 0$ . Donc  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \{O\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . Ensuite, on notant  $r_1$  et  $r_2$  respectivement la fonction  $\theta \mapsto \tan \theta - 1$  et  $r_2 = -r_1$ ,

$$M[\theta + \pi, r_2(\theta + \pi)] = M[\theta + \pi, r_2(\theta)] = M[\theta + \pi, -r_1(\theta)] = M[\theta, r_1(\theta)],$$

et comme  $\theta + \pi$  décrit  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\theta$  décrit  $\mathbb{R}$ , les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont une seule et même courbe.

$\mathcal{C}$  est la courbe d'équation polaire  $r = \tan \theta - 1$ .

**Construction de  $\mathcal{C}$ .**

