Devoir Mathématiques N^o 5 (2 heures)

Exercice 1 : **(5 points)**

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $\ln(x+4)+\ln(x+1)=\ln(x+9)$
(E_2) : $(\ln x)^2+\ln x-12>0$
(E_3) : $e^x=-4$
(E_4) : $(e^x-3)^2=9$
(E_5) : $e^{(x^2)}\leq \dfrac{1}{e}$.
(E_6) : $e^{(x^2)}\leq (e^x)^2$
(E_7) : $x(2e^x-1)\geq 0$.

Exercice 2 : **(2 points)**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur $D=]-\dfrac{\pi}{2};0[$
2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ sur $D=]1;+\infty[$.
3. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+7)^3}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ sur $I=]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$.

Exercice 3 : **(4,5 points)**

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$; en 0.
2. $f(x)=\ln(\sin x)-\ln x$; en 0.
3. $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$; en 0.
4. $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ en 0.
5. $f(x)=\dfrac{e^x}{3x^2+5}$ en $+\infty$.
6. $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1}{3x}$ en 0.

Exercice 4 : **(9 points)**

Soit f la fonction définie sur $I=]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. **Etude d'une fonction auxilliaire** Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x)=1+x-x\ln x$$

   a) Etudier les limites de g en chacunes des bornes de son ensemble de définition.
   b) Etudier les variations de g et construire son tableau de variation.
   c) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur I. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   d) Déduire de ce qui précède le signe de g sur I.

2. **Etude et représentation graphique de la fonction f**
   a) Etudier les limites de f en chacunes des bornes de son ensemble de définition.
   b) Justifier que f est dérivable sur I, et montrer que pour tout $x\in I$,

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+x)^2}$$

   c) En déduire le signe de f' et dresser le tableau de variation de f sur I.
   d) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$, et déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.
   e) Déterminer une équation réduite de la tangente T de $\mathscr{C}$ au point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe de abscisses.