Devoir Mathématiques N^o 5 (2 heures)

Exercice 1 : (4 points)

Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' = 2y - 3y^2$$

On cherche une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$u(0) = \frac{1}{4}$$

1. Soit u une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction v sur $\mathbb{R}$ par $v = \dfrac{1}{u}$.
   Démontrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :
   (i) u est solution de (E) et $u(0) = \dfrac{1}{4}$.
   (ii) v est solution de (E') : $y' = -2y + 3$ et $v(0) = 4$.
2. Résoudre (E') et déterminer v.
3. En déduire la résolution de (E) et la fonction u.

Exercice 2 : (3 points)

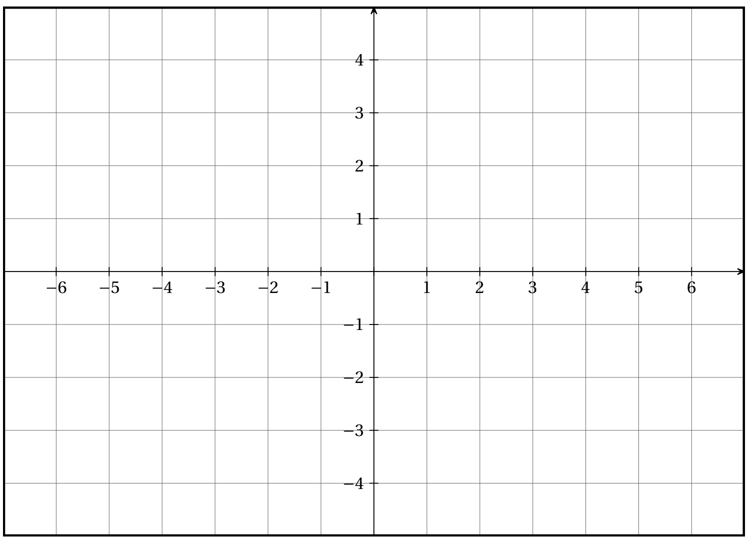
Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification) :

$$\mathscr{E}_1 = \left\{ M(z) \ / \ \arg(z - 2\mathrm{i} + 1) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \right\}$$

$$\mathscr{E}_2 = \left\{ M(z) \ / \ \arg\left(\frac{z - 2\mathrm{i} + 3}{z - 3 - 2\mathrm{i}}\right) = \pi \quad (2\pi) \right\}$$

$$\mathscr{E}_3 = \left\{ M(z) \ / \ Z = \mathrm{i}\frac{z - 2\mathrm{i}}{z + 3\mathrm{i}} \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

$$\mathscr{E}_4 = \{ M(z) \ / \ |z + 2 + \mathrm{i}| = |\bar{z} - 2\mathrm{i}| \}$$



Exercice 3 : (1,5 points)

1. Ecrire sous forme algébrique

$$a_1 = \frac{2 - \mathrm{i}}{5 - 2\mathrm{i}} \qquad\qquad a_2 = (1 + 3\mathrm{i})(5 - \mathrm{i})$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z + 3\mathrm{i}(\overline{z - 5i}) + 2 - 3\mathrm{i} = 0$

Exercice 4 : (3 points)

Soit $z = \mathrm{i}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1. Déterminer la forme algébrique puis une forme exponentielle de z^2.
2. En déduire une forme exponentielle de z.

Exercice 5 : (4 points)

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$a = 2 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}, \quad c = -4 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad d = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$$

1. Placer les points A, B, C et D sur une figure.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Démontrer que $\dfrac{d-b}{c-a}$ est un imaginaire pur. En déduire la nature du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 6 : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d´iinconnue z :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. On considère les points A d'affixe $z_\mathrm{A} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, B d'affixe $z_\mathrm{B} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C.
   a) Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.
   b) Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.
   c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.
   a) Placer les points D et E sur une figure.
   b) Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}\left[1 + \mathrm{i}\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$.
   c) Montrer que $\mathrm{OE} = \mathrm{BE} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, etc …***hors barême**.
   Montrer que les points A, C et E sont alignés.