BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

6 mai 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 3 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 3 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 3

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les trois exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.
On considère les points A$(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et C$(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$ puis les longueurs AB et AC.

   b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

   c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y+2z+2=0$.

3. Soient $\mathcal{P}_1$, et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives $x+y-3z+3=0$ et $x-2y+6z=0$.
   Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et de rayon $r=3$.

   a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

   Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   b) Étudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

   c) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

Exercice 2 — 5 points

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^\star$, on considère l'intégrale

$$I_n=\int_1^{\text{e}}(\ln x)^n\,dx$$

1. a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1;\text{e}[$ et pour tout entier naturel n, on a

   $$(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}>0$$

   b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2. a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

   b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$:

   $$I_{n+1}=\text{e}-(n+1)I_n$$

   c) En déduire I_2 et I_3 en fonction de e.

3. a) Démontrer que pour tout n non nul, $I_n\geq 0$

   b) Démontrer que pour tout n non nul, $(n+1)I_n\leq\text{e}$

   c) En déduire la limite de I_n

   d) Déterminer la valeur de $nI_n+(I_n+I_{n+1})$. En déduire la limite de nI_n.

Exercice 3 — 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^2+4z+8=0.$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a=2-2\mathrm{i}$ et $b=-a$. Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
   a) Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   b) On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d=2-6\mathrm{i}$.
   c) Placer les points C et D sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système :

$$\{(\mathrm{A};1);(\mathrm{B};-1);(\mathrm{C};\alpha)\}.$$

   a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{C}G_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.
   b) En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.
   c) Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha=\mathrm{D}$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha=2$.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}}-\overrightarrow{M\mathrm{B}}+2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|=4\sqrt{2}.$$