BACCALAURÉAT BLANC 2013

– Série S –

Mathématiques (spécialité)

Durée de l'épreuve : 4 h ~ calculatrice autorisée

Exercice 1

5 points

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.
   On considère les événements F_1, F_2, F_3 et D suivants :
   - F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
   - F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
   - F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
   - D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

   (a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les événements précédents.

   Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

   (b) Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.

   (c) Calculer la probabilité de l'événement $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}$.

   (d) En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}$.

   (e) Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
   On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

   (a) Calculer la probabilité qu'exactement deux paires de chaussettes d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

   (b) Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

Exercice 2

5 points

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

Partie A : restitution organisée de connaissance

On admet le résultat suivant.

Prérequis. Soit g et h deux fonctions telles que $g(x) \leqslant h(x)$ pour x suffisamment grand.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Démontrer alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Partie B : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbf{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbf{R}$.

Partie C : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle $\mathscr{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de $\mathscr{T}_a$.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 3

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = 2,$$

ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.
La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_{H} et z_{K} les affixes respectives des points H et K.

   (a) Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

   (b) Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

   (c) Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_{\mathrm{K}} = \left(2\sqrt{2} + 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad z_{\mathrm{H}} = \left(2\sqrt{2} - 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M′ d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. (a) Déterminer et placer les points images de B et C par f.

   (b) On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image.
   Déterminer les points invariants par f.

3. (a) Montrer que pour tout point M distinct de O, on a

$$\mathrm{OM} \times \mathrm{OM}' = 4.$$

   (b) Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.

   (a) Calculer OK′ et OH′.

   (b) Démontrer que

$$z_{\mathrm{K}'} = \left(2\sqrt{2} - 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{H}'} = \left(2\sqrt{2} + 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

   (c) Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

Exercice 4

5 points

Partie A

Pour tout entier naturel n, on définit la suite $u_n = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$.

1. Montrer que l'on peut écrire les premiers termes u_0, u_1 et u_2 de cette suite sous la forme $u_n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Donner les trois premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
2. Montrer que pour tout entier n non nul, on peut écrire $u_n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec
$$a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}.$$
3. On souhaite écrire un algorithme dont l'entrée est un entier naturel non nul n et dont la sortie affiche les valeurs de a_n et b_n. Un élève propose l'algorithme suivant.

```
Entrée : n entier naturel non nul
Traitement :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour j allant de 1 à n
    a prend la valeur 3a + 4b
    b prend la valeur 2a + 3b
Fin pour
Sortie : afficher a et b
```

   Cet algorithme est incorrect, proposer une modification permettant d'afficher les valeurs attendues. *Le recopier entièrement sur votre copie.*
4. Définir une matrice A telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Partie B

On considère les matrices
$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer, en effectuant les calculs à la main (sans calculatrice), que $\mathrm{PQ} = \mathrm{QP} = \mathrm{I}$.
2. Calculer à la main BP puis QBP. Vérifier que QBP est une matrice diagonale D avec
$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
3. Exprimer B en fonction de P, Q et D.
4. Justifier que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{PD}^2\mathrm{Q}$ puis que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{B}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{Q}$.
5. On pose $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$. Démontrer que pour n entier naturel quelconque,
$$a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\alpha^n - \beta^n\right).$$