BACCALAURÉAT BLANC 2013

– Série S –

Mathématiques (obligatoire)

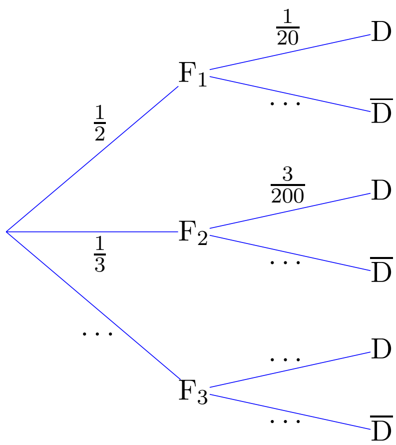
CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) On traduit les données de l'énoncé et on représente la situation par un arbre pondéré.

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{F}_2) = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{D}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{D}) = \frac{1{,}5}{100} = \frac{3}{200}, \qquad \mathrm{P}(\mathrm{D}) = \frac{3{,}5}{100} = \frac{7}{200}.$$



(b) La probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut est égale à

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{D}) = \mathrm{P}\,(\mathrm{F}_1) \times \mathrm{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{D}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{40} = \frac{5}{200}.$$

(c) De la même façon la probabilité de l'événement $\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}$ est égale à

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{200} = \frac{1}{200}.$$

(d) On calcule $\mathrm{P}(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D})$ avec la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{D}) + \mathrm{P}(\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}) + \mathrm{P}(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}),$$

soit ici

$$\frac{7}{200} = \frac{5}{200} + \frac{1}{200} + \mathrm{P}(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}),$$

donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}) = \frac{1}{200}.$$

(e) On a

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{F}_1) - \mathrm{P}(\mathrm{F}_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Puis

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}_3}(\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D})}{\mathrm{P}(\mathrm{F}_3)} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{200} = \frac{3}{100}.$$

2. (a) Le tirage des 6 chaussettes est assimilé à 6 tirages indépendants avec remise, ce qui correspond à la répétition de 6 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ayant pour « succès » l'obtention d'une chaussette défectueuse.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de chaussettes défectueuses sur un tirage de 6 chaussettes. X compte donc le nombre de succès, ainsi elle suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p = \mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0{,}035$.
Lorsque X suit $\mathscr{B}(n, p)$ on sait que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

soit ici

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \binom{6}{2} 0{,}035^2 (1 - 0{,}035)^4 = 15 \times 0{,}035^2 \times 0{,}965^4 \approx 0{,}015\ 934 \approx 0{,}016.$$

(b) La probabilité qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) &= \binom{6}{0} 0{,}035^0 (1 - 0{,}035)^6 + \binom{6}{1} 0{,}035^1 (1 - 0{,}035)^5 \\ &\approx 0{,}807\ 54 + 0{,}175\ 734 \approx 0{,}983.\end{aligned}$$

Exercice 2

Partie A : restitution organisée de connaissance

On pose $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout x réel,

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On étudie le signe de cette dérivée :

$$\varphi'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0,$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. On en déduit le tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$\varphi(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1.$$

Ainsi, pour tout x réel, $\varphi(x) > 0$ soit $\mathrm{e}^x > x$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc, d'après le prérequis,

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Partie B

1. Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
2. On a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. On calcule la dérivée de f :
$$f'(x) = 1e^{x-1} + x \times 1 \times e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$
4. Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 1$. Or $x + 1 \geqslant 0$ équivaut à $x \geqslant -1$. Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, +\infty[$ et $f(-1) = -1e^{-1-1} + 1 = 1 - e^{-2}$. On peut dresser le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

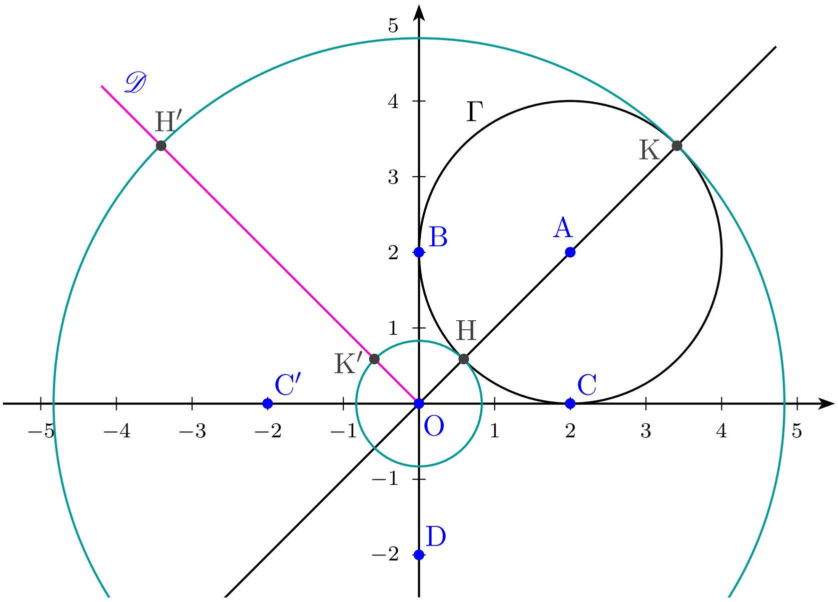
Partie C

1. La tangente $\mathscr{T}_a$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire
$$y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1.$$
2. Soit $a > 0$, alors
$$\begin{aligned} O(0,0) \in \mathscr{T}_a &\iff 0 = (a+1)e^{a-1}(-a) + ae^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = e^{a-1}(-a^2 - \cancel{a} + \cancel{a}) + 1 \\ &\iff 1 - a^2e^{a-1} = 0. \end{aligned}$$
3.
   - 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - 1 = 0$.
   - Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,
   $$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2e^{x-1} = (-2x - x^2)e^{x-1} = -x(2+x)e^{x-1}.$$
   Sur $]0, +\infty[$, $x > 0$, donc $x + 2 > 0$ et $-x < 0$; par ailleurs $e^{x-1} > 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
   Donc si $x < 1$, alors $g(x) > g(1)$ et si $x > 1$, alors $g(x) < g(1)$. Comme $g(1) = 0$, on conclut que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.
4. La seule tangente passant par l'origine du repère est donc la droite $\mathscr{T}_1$ qui a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$.

Exercice 3

1. On a $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$.

   (a) On place les points sur une figure que l'on complète au fur et à mesure.



   (b) $OA = |z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   O, H, A et K sont alignés dans cet ordre donc

$$OH = OA - AH = 2\sqrt{2} - 2 \quad \text{et} \quad OK = OA + AK = 2\sqrt{2} + 2.$$

   (c) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires de même sens, donc

$$\arg(z_H) = \arg(z_K) = \arg(z_A) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi).$$

   Alors

$$z_K = |z_K|e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2} + 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_H = |z_H|e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2} - 2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

À tout point point M d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. (a) Soit B′ et C′ les images respectives de B et C par f. On a

$$z_{B'} = \frac{-4}{2i} = \frac{-4i}{-2} = 2i \quad \text{et} \quad z_{C'} = \frac{-4}{2} = -2.$$

   L'image de B et le point B lui même et l'image de C est le point C′ d'affixe -2.

   (b) M, d'affixe $z \neq 0$, invariant par f se traduit par

$$z = \frac{-4}{z} \iff z^2 = -4 \iff z = 2i \text{ ou } z = -2i.$$

   Les points invariants par f sont B et le point D d'affixe $-2i$.

3. (a) Pour tout point M, d'affixe z, distinct de O,

$$z' = \frac{-4}{z} \implies zz' = -4 \implies |z|\times|z'| = 4 \implies \mathrm{OM}\times\mathrm{OM}' = 4.$$

(b) Pour tout point M, d'affixe z, distinct de O,

$$z' = \frac{-4}{z} \implies \arg(z') = \arg(-4) - \arg(z) = \pi - \arg(z) \quad (2\pi).$$

4. (a) D'après le 3.a,

$$\mathrm{OK}' = \frac{4}{\mathrm{OK}} = \frac{4}{2\sqrt{2}+2} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2\sqrt{2}-2 = \mathrm{OH},$$
$$\mathrm{OH}' = \frac{4}{\mathrm{OH}} = \frac{4}{2\sqrt{2}-2} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2}+2 = \mathrm{OK}.$$

(b) D'après le 3.b,

$$\arg(z_{\mathrm{K}'}) = \pi - \arg(z_{\mathrm{K}}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi),$$
$$\arg(z_{\mathrm{H}'}) = \pi - \arg(z_{\mathrm{H}}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi).$$

Comme $|z_{\mathrm{K}'}| = \mathrm{OK}'$ et $|z_{\mathrm{H}'}| = \mathrm{OH}'$, on déduit les formes exponentielles :

$$z_{\mathrm{K}'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{H}'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

(c) $z_{\mathrm{K}'}$ et $z_{\mathrm{H}'}$ ont pour argument $\frac{3\pi}{4}$, donc K′ et H′ sont sur la demi-droite $\mathscr{D}$ (constituée des points d'argument $\frac{3\pi}{4}$). De plus $\mathrm{OK}' = \mathrm{OH}$ donc K′ appartient aussi au cercle de centre O et rayon OH. De même $\mathrm{OH}' = \mathrm{OK}$, donc H′ appartient au cercle de centre O et rayon OK. D'où la construction des deux points.

Exercice 4

Partie A

Lorsque N = 3 l'algorithme effectue trois boucles avant de s'arrêter. k prend successivement les valeurs 0, 1 et 2. U est initialisée à 0 et, à la fin de la boucle $k = 0$, on a U = 3 ; à la fin de la boucle $k = 1$ on a U = 10 et, à la fin de la boucle correspondant à $k = 2$, on obtient U = 29. L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

On a la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. On calcule $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$.

2. (a) Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $u_n \geqslant n$.
   - $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété P_0 est vérifiée.

- Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n fixée. Alors
$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 = n + 3 \geqslant n + 1.$$
La propriété est alors vérifiée au rang $n + 1$.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence on en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

(b) D'après le théorème de comparaison,
$$\left(\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ et } u_n \geqslant n\right) \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

3. Pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(\underbrace{u_n - n}_{\geqslant 0}) + 3 \geqslant 0,$$
donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - \cancel{1} + \cancel{1} = 3(u_n - n + 1) = 3v_n.$$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

(b) Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 3, on a, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 3^n$, or $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$, donc $v_n = 3^n$. Alors $u_n = v_n + n - 1$, soit $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Comme $3 > 1$, 3^n tend vers $+\infty$, donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et on peut alors affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

(b) $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$, donc $n = 3p$ est un entier tel que $u_n \geqslant 10^p$; n_0 étant le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^p$, on a donc $n_0 \leqslant 3p$.

(c) À la calculatrice, on obtient $u_6 = 734 < 10^3$ et $u_7 = 2193 \geqslant 10^3$, donc pour la valeur $p = 3$, on a $n_0 = 7$.

(d) Algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul p.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
    Tant que U < 10^p
    Affecter à U la valeur 3U − 2k + 3
    Affecter à k la valeur k + 1
Fin tant que

Sortie
Afficher k
```